Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

Lösungsvorschlag für das

3. Übungsblatt

Aufgabe 6: (1 + 1 = 2 Punkte)
Betrachten Sie die *Wellen-* bzw. *Wärmeleitungsgleichung*

(a) $u_{xx} - u_{yy} = 0$

(b) $v_x - v_{yy} = 0$

im $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie alle Charakteristiken im Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$.

Lösung:
Wir lesen an den Koeffizienten der Differentialoperatoren ab:

(a)
$$a_{11} = 1, a_{22} = -1, a_{12} = 0 \Rightarrow a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0 \Rightarrow \text{hyperbolisch}$$

Also gehen durch jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zwei Charakteristiken mit den Steigungen
$$\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)_{\pm} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \pm \frac{1}{a_{11}}\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} = \pm 1$$
durch. Damit definieren $y_1(x) = x$ sowie $y_2(x) = -x$ für $x \in \mathbb{R}$ die beiden Charakteristiken durch $0 \in \mathbb{R}^2$.

(b)
$$a_{11} = 0, a_{22} = -1, a_{12} = 0 \Rightarrow a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \Rightarrow \text{parabolisch}$$

Also geht durch jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine Charakteristik mit der Steigung
$$\left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}\right) = \frac{a_{12}}{a_{22}} = 0$$
durch. Damit definiert $x(y) = 0$ für $y \in \mathbb{R}$ die einzige Charakteristik durch $0 \in \mathbb{R}^2$.

□

Aufgabe 7:
Sei $\Omega = (0, 2)$. Betrachten Sie die durch

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leq x < 2 \end{cases}, \qquad v(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

definierte Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $u \in H^1(\Omega)$

(b) $v \notin H^1(\Omega)$

Hinweis: Zeigen Sie in (b), dass eine $\|\cdot\|_{H^1}$-beschränkte Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^1(\overline{\Omega})^{\mathbb{N}}$ nicht gegen v in $\|\cdot\|_2$ konvergieren kann. Benutzen Sie dazu den „Trick“ aus Aufgabe 4.

Erinnerung: Eine Funktion $u \in L^2(\Omega)$ liegt genau dann im Sobolev-Raum $H^1(\Omega)$, wenn es eine Funktion $\nabla u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^1(\overline{\Omega})^{\mathbb{N}}$ gibt, für die $\|u_n - u\|_2 \overset{n\to\infty}{\to} 0$ und $\|\nabla u_n - \nabla u\|_2 \overset{n\to\infty}{\to} 0$ gilt.
Man nennt $\nabla u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ die *schwache Ableitung* von u. Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ stimmt ∇u mit dem Gradienten von u (fast überall) überein. Auf $H^1(\Omega)$ wird durch

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\int_\Omega |u|^2 + (\nabla u)^2 \,\mathrm{dx}} \qquad \big(u \in H^1(\Omega)\big)$$

eine Norm erklärt.

Lösung:

(a) Idee: Die Funktion u ist auf $(0, 1)$ und $(1, 2)$ stetig differenzierbar. Also stimmt ihre schwache Ableitung dort mit der gewöhnlichen Ableitung überein. Die schwache Ableitung u' ist, falls sie auf ganz Ω existiert, nur fast überall eindeutig. Deshalb kann sie im Punkt $x = 1$ beliebig definiert werden. Ein sinnvoller Kandidat ist deshalb die durch

$$u'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } 1 < x < 2 \end{cases}$$

definierte Funktion $u' \in L^2(\Omega)$.

Zum Beweis approximieren wir u durch eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ im L^2-Sinn und untersuchen, ob die Folge der Ableitungen $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ in L^2 gegen u' konvergiert. Sei dazu

$$u_n(x) = \begin{cases} p_n(x) & \text{für } x \in I_n = [1 - \frac{1}{n}, 1] \\ u(x) & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $p_n(x) = p_0+p_1(x-1)+p_2(x-1)^2+p_3(x-1)^3$ das Interpolationspolynom dritten Gerades ist, mit dem u_n stetig differenzierbar wird. Es wird durch die Bedingungen

$$\begin{aligned} p(1) &= u(1) = 1 \\ p'(1) &= u'(1) = 0 \\ p(1-\frac{1}{n}) &= u(1-\frac{1}{n}) = 1-\frac{1}{n} \\ p'(1-\frac{1}{n}) &= u'(1-\frac{1}{n}) = 1 \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt zu:

$$p_n(x) = 1 - 2n(x-1)^2 - n^2(x-1)^3 \qquad (\forall x \in I_n)$$

Für die Folge der Differenzen $(u_n - u)_{(n\in\mathbb{N})}$ gilt:

$$|u_n(x) - u(x)| = |p_n(x) - x| \leq \underbrace{|1-x|}_{\leq \frac{1}{n}} + 2n\,|x-1|^2 + n^2\,|x-1|^3 \leq \frac{4}{n} \quad (x \in I_n)$$

Damit folgt $\|u_n - u\|_2 = \sqrt{\int_{I_n} |p_n(x) - x|^2 \,\mathrm{dx}} \leq \frac{4}{\sqrt{n^3}} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$

Ferner gilt für die Folge der Differenzen der Ableitungen $(u_n' - u')_{(n\in\mathbb{N})}$:

$$|u_n'(x) - u'(x)| = |p_n'(x) - 1| \leq 4n\,|x-1| + 3n^2\,|x-1|^2 + 1 \leq 8 \quad (x \in I_n)$$

Damit folgt $\|u_n' - u'\|_2 = \sqrt{\int_{I_n} |u_n'(x) - u'(x)|^2 \,\mathrm{dx}} \leq \frac{8}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Damit ist tatsächlich $u \in H^1(\Omega)$.

(b) Annahme zum Widerspruch: $v \in H^1(\Omega)$. Dann existiert die schwache Ableitung $v' \in L^2(\Omega)$ sowie eine Folge $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})} \in C^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ mit $\|v_n - v\|_2 \overset{n\to\infty}{\to} 0$ und $\|v_n' - v'\|_2 \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

Diese Folge enthält eine punktweise fast-überall konvergente Teilfolge $(v_{n_k})_{(k\in\mathbb{N})}$. O.B.d.A. sei bereits $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ punktweise fast-überall konvergent gegen v.

Da die Folge $(v_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist in L^2, ist sie dort auch beschränkt, etwa $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_n'\|_2 > 0$. Wegen der Konvergenz fast-überall, gibt es $x^-, x^+ \in \Omega$ mit $x^- < 1 < x^+$ derart, dass $|x^+ - x^-| < \frac{1}{4M^2}$ und

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x^-) = v(x^-) = x^-, \qquad \lim_{n\to\infty} v_n(x^+) = v(x^+) = 2.$$

Dem Hinweis folgend, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|v_n(x^+) - v_n(x^-)\right| \leq \int_{x^-}^{x^+} 1 \cdot |v_n'(z)| \,\mathrm{dz} \overset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\sqrt{|x^+ - x^-|}}_{\leq \frac{1}{2M}} \underbrace{\|v_n'\|_2}_{\leq M} \leq \frac{1}{2},$$

dann aber
$$\frac{1}{2} \geq \lim_{n\to\infty} \left|v_n(x^+) - v_n(x^-)\right| = 2 - x^- > 1.$$

□

Aufgabe 8: (1 + 2 = 3 Punkte)
Sei $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Betrachten Sie die durch

$$u(x,y) = \sqrt{|x-y|}, \qquad v(x,y) = \sin\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

definierte Funktionen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $u \in H^1$

(b) $v \in H^1$

Hinweis: Untersuchen Sie zuerst die Quadratintegrierbarkeit der Ableitungen. Benutzen Sie in (b) 2D-Polarkoordinaten.

Lösung:

(a) Sei $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$, $\Omega' = \Omega \setminus \Delta$. Es ist $u \in C^1(\Omega')$. Da $\Delta \subseteq R^2$ eine Nullmenge ist, muss die schwache Ableitung ∇u, falls sie existiert, mit dem Gradienten von u fast-überall übereinstimmen. Es gilt
$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{|x-y|}} \cdot \frac{x-y}{|x-y|} = -\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \qquad ((x,y) \in \Omega')\,,$$
und damit
$$2 \cdot \|\nabla u\|_2^2 = \int_{\Omega'} \frac{1}{|x-y|} \mathrm{d}(x,y) \geq \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x-y} \mathrm{dydx} = \int_0^1 \underbrace{\int_0^x \frac{1}{y} \mathrm{dy}}_{=\infty} \mathrm{dx} = \infty.$$
Also ist $u \notin H^1(\Omega)$.

(b) Da $v \in C^1(\Omega)$, muss die schwache Ableitung ∇v, falls sie existiert, fast-überall mit dem Gradienten von v übereinstimmen. Es gilt
$$\frac{\partial}{\partial x} v(x,y) = -\cos\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right) \frac{x}{x^2+y^2}$$
sowie
$$\frac{\partial}{\partial y} v(x,y) = -\cos\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right) \frac{y}{x^2+y^2}$$

und damit $|\nabla v|^2(r) = \cos^2(\ln(r))\frac{1}{r^2}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_2^2 &= \int_\Omega |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}(x,y) \\
&\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 |\nabla v|^2(r) r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \cos^2(\ln(r)) \frac{1}{r} \mathrm{dr} \\
&\overset{r=e^z}{=} \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^0 \cos^2(z) \mathrm{dz} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Also ist $v \notin H^1(\Omega)$.

$\square$

http://numhpc.math.kit.edu/1375.php