Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

Lösungsvorschlag für das

4. Übungsblatt

Aufgabe 9:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Ferner sei $u \in C^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ mit $\nabla u \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die schwachen Ableitungen $\partial_i u$ ($i \in \{1, \ldots, d\}$) existieren und mit den gewöhnlichen Ableitungen übereinstimmen. Es ist, mit anderen Worten,

$$\int_\Omega \partial_i u(x)\varphi(x)\mathrm{dx} = (-1)\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)\mathrm{dx} \qquad (\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega))$$

zu zeigen.
Hinweis: Setzen Sie den Integranden geschickt fort und benutzen Sie den Satz von Fubini und partielle Integration.

Lösung:
Seien $i \in \{1, \ldots d\}$ und $\varphi \in C_0^\infty$ beliebig aber fest. Da Ω beschränkt ist, gibt es ein $R > 0$ derart, dass $\Omega \subseteq [-R, R]^d = \Omega'$ gilt. Sei $K = \operatorname{supp}\varphi$. Es existiert eine s.g. *Cutoff*-Funktion $\Psi \in C_0^\infty(\Omega')$ zu K mit folgenden Eigenschaften:

(i) $0 \leq \Psi \leq 1$

(ii) Es existiert eine offene Menge $O \supseteq K$ mit $\Psi|_O \equiv 1$

(iii) $\operatorname{supp}\Psi \subseteq \Omega$

Betrachte die Fortsetzung $\overline{u} : \Omega' \to \mathbb{R}$ von u bzw. $\overline{\varphi} : \Omega' \to \mathbb{R}$ von φ definiert durch

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} \Psi(x)u(x) & \text{falls } x \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \Psi(x)\varphi(x) & \text{falls } x \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x \in \Omega').$$

Wegen $u|_O = \overline{u}|_O$ gilt $(\partial_i u)|_O = (\partial_i \overline{u})|_O$. Wegen $\varphi|_O = \overline{\varphi}|_O$ gilt entsprechend $(\partial_i\varphi)|_O = (\partial_i\overline{\varphi})|_O$. Mit $K \subseteq O$ folgt:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_i u(x)\varphi(x)\mathrm{dx} &= \int_{\Omega'} \partial_i\overline{u}(x)\overline{\varphi}(x)\mathrm{dx} \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \underbrace{\int_{-R}^{R}\cdots\int_{-R}^{R}}_{d-\text{fach}} \partial_i\overline{u}(x)\overline{\varphi}(x)\mathrm{dx}_i\mathrm{dx}_1\cdots\mathrm{dx}_{i-1}\cdots\mathrm{dx}_{i+1}\cdots\mathrm{dx}_d\end{aligned}$$

Für das innerste Integral ergibt partielle Integration:

$$\int_{-R}^{R} \partial_i \overline{u}(x)\overline{\varphi}(x)\mathrm{dx}_i = \underbrace{[\overline{u}(x)\overline{\varphi}(x)]_{x=(x1,\ldots,x_i=-R,\ldots,x_d)}^{x=(x1,\ldots,x_i=R,\ldots,x_d)}}_{=0} - \int_{-R}^{R} \overline{u}(x)\partial_i\overline{\varphi}(x)\mathrm{dx}_i$$

Wiedereinsetzen liefert die Behauptung:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} \partial_i \overline{u}(x)\overline{\varphi}(x)\mathrm{dx} &= -\int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \overline{u}(x)\partial_i\overline{\varphi}(x)\mathrm{dx}_i\mathrm{dx}_1\cdots\mathrm{dx}_{i-1}\cdots\mathrm{dx}_{i+1}\cdots\mathrm{dx}_d \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} -\int_{\Omega'} \overline{u}(x)\partial_i\overline{\varphi}(x)\mathrm{dx} = -\int_{\Omega} u(x)\partial_i\varphi(x)\mathrm{dx}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 10:
Betrachten Sie im Kreissektor mit Mittelpunktswinkel $0 < \omega \leq 2\pi$

$$\Omega_\omega = \{r\cos(\varphi), r\sin(\varphi) | 0 < r < 1, 0 < \varphi < \omega\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

das folgende Randwertproblem in 2D-Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\Delta u_\omega(r,\varphi) &= 0 \ ((r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \in \Omega_\omega) \\
u_\omega(r,\varphi) &= 0 \ (0 \leq r \leq 1, \varphi \in \{0,\omega\}) \\
u_\omega(1,\varphi) &= \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\varphi\right) \ (\varphi \in (0,\omega))
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die durch

$$u_\omega(r,\varphi) = r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\varphi\right) \qquad (r \in [0,1], \varphi \in [0,\omega])$$

definierte Funktion das obige Randwertproblem löst.

(b) Zeigen Sie, dass für $\pi < \omega \leq 2\pi$, d.h. im Fall eines stumpfen Mittelpunktswinkels, ∇u_ω zwar unbeschränkt, aber noch quadratintegrabel ist. Zeigen sie ferner, dass Ableitungen zweiter Ordnung nicht mehr quadratintegrabel sind. Wie sieht es bei spitzem Mittelpunktswinkel, d.h. $0 < \omega < \pi$, aus?

Lösung:
Wir berechnen vorbereitend alle nötigen Ableitungen von u_ω. Für alle $r \in (0,1)$ und alle $\varphi \in (0,\omega)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\partial_r u_\omega(r,\varphi) &= \left(\frac{\pi}{\omega}\right) r^{\frac{\pi}{\omega}-1} \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\varphi\right) &(1) \\
\partial_\varphi u_\omega(r,\varphi) &= \left(\frac{\pi}{\omega}\right) r^{\frac{\pi}{\omega}} \cos\left(\frac{\pi}{\omega}\varphi\right) &(2) \\
\partial_{rr} u_\omega(r,\varphi) &= \left(\frac{\pi}{\omega}\right)\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right) r^{\frac{\pi}{\omega}-2} \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\varphi\right) &(3) \\
\partial_{\varphi\varphi} u_\omega(r,\varphi) &= -\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\varphi\right) &(4)
\end{aligned}$$

(a) Der Laplace-Operator in 2D-Polarkoordinaten lautet

$$\Delta = \partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}. \tag{5}$$

Einsetzen von (3), (1) und (4) in (5) liefert

$$\Delta u_\omega(r,\varphi) = \left[\left(\frac{\pi}{\omega}\right)\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)r - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 r^2\right] r^{\frac{\pi}{\omega}-2}\sin\left(\frac{\pi}{\omega}\varphi\right) = 0$$

für alle $r \in (0,1)$ und alle $\varphi \in (0,\omega)$. Also ist die Differentialgleichung erfüllt. Die Randbedingungen sind wegen $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ erfüllt.

(b) Der Gradient in Polarkoordinaten lautet

$$\nabla = e_r\partial_r + e_\varphi\frac{1}{r}\partial_\varphi. \tag{6}$$

Es gilt $|\nabla u_\omega| \geq \partial_r u_\omega$. Also ist für $\frac{\pi}{\omega} < 1$ (stumpfer Mittelpunktswinkel) $\partial_r u_\omega(r,\frac{\omega}{2}) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right) r^{\frac{\pi}{\omega}-1} \overset{r\to 0+}{\to} \infty$ und der Gradient von u_ω unbeschränkt.
Einsetzen von (1) und (2) in (6) liefert

$$\nabla u_\omega(r,\varphi) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right) r^{\frac{\pi}{\omega}-1}\left[\sin\left(\frac{\pi}{\omega}\varphi\right)e_r + \cos\left(\frac{\pi}{\omega}\varphi\right)e_\varphi\right] \tag{7}$$

für alle $r \in (0,1)$ und alle $\varphi \in (0,\omega)$. Damit folgt wegen $\frac{2\pi}{\omega} \geq 1$ (stumpfer Mittelpunktswinkel)

$$\|\nabla u_\omega\|_2^2 = \int_0^\omega\int_0^1 |\nabla u_\omega(r,\varphi)|^2\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi^2}{\omega}\int_0^1 r^{\frac{2\pi}{\omega}-1}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\left[r^{\frac{2\pi}{\omega}}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{\pi}{2} < \infty.$$

Da die Hesse-Matrix H von u_ω symmetrisch ist ($\Rightarrow H_{12} = H_{21}$) und $\Delta u_\omega = 0$ gilt ($\Rightarrow H_{11} = -H_{22}$), reicht es die Einträge $H_{11} = \partial_{xx}u_\omega$ und $H_{12} = \partial_{xy}u_\omega$ zu berechnen. Mit $e_r = \cos(\varphi)e_x + \sin(\varphi)e_y$ und $e_\varphi = -\sin(\varphi)e_x + \cos(\varphi)e_y$ liest man aus (6) ab:

$$\partial_x = \cos(\varphi)\partial_r - \sin(\varphi)\frac{1}{r}\partial_\varphi, \qquad \partial_y = \sin(\varphi)\partial_r + \cos(\varphi)\frac{1}{r}\partial_\varphi$$

Damit folgt aus (7)

$$\begin{aligned}
\partial_{xx}u_\omega(r,\varphi) &= \left(\cos(\varphi)\partial_r - \sin(\varphi)\frac{1}{r}\partial_\varphi\right)\left(\frac{\pi}{\omega}\right) r^{\frac{\pi}{\omega}-1}\left[\cos(\varphi)\sin\left(\frac{\pi}{\omega}\varphi\right) - \sin(\varphi)\cos\left(\frac{\pi}{\omega}\varphi\right)\right] \\
&= \left(\cos(\varphi)\partial_r - \sin(\varphi)\frac{1}{r}\partial_\varphi\right)\left(\frac{\pi}{\omega}\right) r^{\frac{\pi}{\omega}-1}\sin\left(\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right)\varphi\right) \\
&= \left(\frac{\pi}{\omega}\right)\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right) r^{\frac{\pi}{\omega}-2}\left[\cos(\varphi)\sin\left(\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right)\varphi\right) - \sin(\varphi)\cos\left(\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right)\varphi\right)\right] \\
&= \left(\frac{\pi}{\omega}\right)\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right) r^{\frac{\pi}{\omega}-2}\sin\left(\left(\frac{\pi}{\omega}-2\right)\varphi\right)
\end{aligned}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\partial_{xy} u_\omega(r,\varphi) &= \left(\cos(\varphi)\partial_r - \sin(\varphi)\frac{1}{r}\partial_\varphi\right)\left(\frac{\pi}{\omega}\right) r^{\frac{\pi}{\omega}-1}\left[\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\pi}{\omega}\varphi\right) + \cos(\varphi)\cos\left(\frac{\pi}{\omega}\varphi\right)\right] \\
&= \left(\cos(\varphi)\partial_r - \sin(\varphi)\frac{1}{r}\partial_\varphi\right)\left(\frac{\pi}{\omega}\right) r^{\frac{\pi}{\omega}-1}\cos\left(\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right)\varphi\right) \\
&= \left(\frac{\pi}{\omega}\right)\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right) r^{\frac{\pi}{\omega}-2}\left[\cos(\varphi)\cos\left(\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right)\varphi\right) + \sin(\varphi)\sin\left(\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right)\varphi\right)\right] \\
&= \left(\frac{\pi}{\omega}\right)\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right) r^{\frac{\pi}{\omega}-2}\cos\left(\left(\frac{\pi}{\omega}-2\right)\varphi\right)
\end{aligned}
$$

für alle $r \in (0,1)$ und alle $\varphi \in (0,\omega)$. Seien $C_{11}^2 = C_{22}^2 = \int_0^\omega \sin^2\left(\left(\frac{\pi}{\omega}-2\right)\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$, $C_{12}^2 = C_{21}^2 = \int_0^\omega \cos^2\left(\left(\frac{\pi}{\omega}-2\right)\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$. Es gilt für alle $i,j \in \{1,2\}$

$$
\|H_{ij}\|_2^2 = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right)^2 \underbrace{C_{ij}^2}_{>0}\int_0^1 r^{2\left(\frac{\pi}{\omega}-2\right)} r\mathrm{d}r = \frac{\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right)}{2}\left[r^{2\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right)}\right]_{r=0}^{r=1} = \infty,
$$

wegen $\frac{\pi}{\omega} < 1$ (stumpfer Mittelpunktswinkel).

Im Fall eines spitzen Mittelpunktswinkels ($0 < \omega < \pi$) liest man aus (7) ab, dass der Gradient beschränkt und erst recht quadratintegrabel ist. Auch die zweiten Ableitungen sind quadratintegrabel.

□

Aufgabe 11:
Betrachten Sie die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d-1}$ definiert durch

$$
(Lv)_j = b_j v_{j-1} - a_j v_j + c_j v_{j+1} \qquad (j \in \{1,\dots,d-1\}).
$$

Dabei ist $d \geq 2$ und die Koeffizienten erfüllen $b_j, c_j > 0$ und $a_j \geq b_j + c_j$ für alle $j \in \{1,\dots,d-1\}$.

(a) Beweisen Sie das folgende *diskrete Maximumprinzip*:
Wenn eine nicht-negative maximale Komponente

$$
v_{j^*} = \max_{j\in\{0,\dots,d\}} v_j \geq 0
$$

des Vektors $v = (v_0,\dots,v_d)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $Lv \geq 0$ einen *inneren Index*

$$
1 \leq j^* \leq d-1
$$

trägt, so gilt $v_0 = v_1 = \cdots = v_d$.

(b) Beweisen Sie die *inverse Monotonie* von $-L$:
Wenn für die Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^{d+1}$ die Bedingungen

$$-Lu \leq -Lv \qquad \text{und} \qquad u_0 \leq v_0,\ u_d \leq v_d$$

erfüllt sind, so gilt $u \leq v$.

Lösung:

(a) Nach Voraussetzung gilt $(Lv)_j \geq 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, d-1\}$. Für $j = j^*$ gilt also insbesondere

$$b_{j^*} v_{j^*-1} + c_{j^*} v_{v^*+1} \geq a_{j^*} \underbrace{v_{j^*}}_{\geq 0} \geq (b_{j^*} + c_{j^*}) v_{j^*}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\underbrace{b_{j^*}}_{>0} \underbrace{(v_{j^*-1} - v_{j^*})}_{\leq 0} + \underbrace{c_{j^*}}_{>0} \underbrace{(v_{v^*+1} - v_{j^*})}_{\leq 0} \geq 0.$$

Eine Summe zweier nicht-positiver Zahlen kann aber nur dann nicht-negativ sein, wenn beide Zahlen Null sind. Daraus folgt

$$v_{j^*-1} = v_{j^*} = v_{v^*+1}.$$

Durch induktive Anwendung dieses Arguments folgt die Behauptung.

(b) Annahme zum Widerspruch: $u \nleq v$

Dann existiert ein $j_0 \in \{0, \ldots d\}$ mit $u_{j_0} > v_{j_0}$. Definiere $w = u - v$. Wegen der Annahme, gilt für jede maximale Komponente w_{j^*} von w

$$w_{j^*} = \max_{j \in \{0, \ldots, d\}} w_j \geq w_{j_0} > 0.$$

Da $w_0 = u_0 - v_0 \leq 0$ und $w_d = u_d - v_d \leq 0$, muss j_0 ein innerer Index sein. Schließlich gilt $Lw = Lu - Lv \geq 0$. Nach Teilaufgabe (a) gilt dann aber:

$$0 \geq w_0 = \cdots = \underbrace{w_{j_0}}_{>0} = \cdots = w_d$$

Also muss $u \leq v$ gelten.

□

http://numhpc.math.kit.edu/1375.php