Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

Lösungsvorschlag für das

5. Übungsblatt

Aufgabe 12:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Ferner sei $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ ein linearer *elliptischer* Differentialoperator der Form

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + c(x)u \qquad (x \in \Omega)$$

mit $a_{ij} \in C(\Omega)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ und $c \in C(\Omega)$, $c \geq 0$.

(a) Zeigen Sie für L ein *abgeschwächtes Maximumprinzip*:
Ist $Lu \leq 0$ in Ω für $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, so folgt

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leq \max\{0, \max_{x \in \partial\Omega} u(x)\}.$$

Hinweis: Wenden Sie das Maximumprinzip aus der Vorlesung auf den Differentialoperator $L - c$ geeignet an.

(b) Folgern Sie aus (a) für L ein *abgeschwächtes Minimumprinzip*:
Ist $Lu \geq 0$ in Ω für $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, so folgt

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \geq \min\{0, \min_{x \in \partial\Omega} u(x)\}.$$

(c) Betrachten Sie das folgende Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} Lu_i &= f && \text{in } \Omega \\ u_i &= g_i && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $f \in C(\Omega)$, $g_i \in C(\partial\Omega)$, $i \in \{1, 2\}$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und (b) die *stetige Abhängigkeit* der klassischen Lösungen $u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ von den Randdaten:

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq \|g_1 - g_2\|_\infty$$

Lösung:

(a) Ist $u \leq 0$ in Ω, so ist nichts zu zeigen. Sei also o.B.d.A. $m := \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) > 0$. Wir werden zeigen, dass die Menge

$$M := \{x \in \Omega | u(x) = m\}$$

gleichzeitig offen und abgeschlossen ist.

Die einpünktige Menge $\{m\}$ ist abgeschlossen. Da u stetig ist, ist auch $M = u^{-1}(\{m\})$ abgeschlossen. Bleibt zu zeigen: M ist offen.

Betrachte dazu ein $x_0 \in M$. Da u stetig ist in der offenen Menge Ω, gibt es ein $R > 0$ derart, dass

$$\Omega' := B_R(x_0) \subseteq \overline{\Omega'} \subseteq \Omega$$

ausfällt und $u|_{\overline{\Omega'}} > 0$ gilt.

Betrachte den linearen elliptischen Differentialoperator $G := L - c$. Es gilt

$$Gu(x) = \underbrace{Lu(x)}_{\leq 0} - \underbrace{c(x)u(x)}_{\leq 0} = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u(x) \leq 0$$

für alle $x \in \Omega'$.

Also erfüllt G die Voraussetzungen des Maximumprinzip aus der Vorlesung. Wegen

$$u(x_0) = \max_{x\in\Omega} u(x) \geq \max_{x\in\Omega'} u(x),$$

nimmt u auf Ω' sein Maximum im Inneren an. Damit ist $u|_{\Omega'} \equiv m$, also $B_R(x_0) \subseteq M$. Deshalb ist M offen.

Da Ω zusammenhängend ist, gilt $M \in \{\emptyset, \Omega\}$.

Ist $M = \emptyset$, so gilt $u(x) < \max_{y\in\overline{\Omega}} u(y)$ für alle $x \in \Omega$ und damit:

$$\max_{y\in\overline{\Omega}} u(y) = \max_{y\in\partial\Omega} u(y)$$

Ist $M = \Omega$, so ist $u \equiv m$ und wieder:

$$\max_{y\in\overline{\Omega}} u(y) = m = \max_{y\in\partial\Omega} u(y)$$

(b) Sei $w := -u$. Es gilt

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} w(x) = \max_{x\in\overline{\Omega}} (-u(x)) = -\min_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$$

sowie

$$\max\left\{0, \max_{x\in\partial\Omega} w(x)\right\} = \max\left\{-0, -\min_{x\in\partial\Omega} u(x)\right\} = -\min\left\{0, \max_{x\in\partial\Omega} u(x)\right\}.$$

Da w die Voraussetzungen des abgeschwächten Maximumprinzips aus der Teilaufgabe (a) erfüllt, gilt die Behauptung:

$$-\max_{x\in\overline{\Omega}} w(x) = \min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \geq \min\left\{0, \max_{x\in\partial\Omega} u(x)\right\} = -\max\left\{0, \max_{x\in\partial\Omega} w(x)\right\}$$

(c) Sei $g := g_1 - g_2$. Die Funktion $w := u_1 - u_2$ löst das Dirichlet-Problem:

$$\begin{aligned} Lw &= 0 && \text{in } \Omega \\ w &= g && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Insbesondere ist $Lw \leq 0$ und $Lw \geq 0$ in Ω. Mit der Teilaufgabe (a) folgt also

$$w(x) \leq \max_{y\in\overline{\Omega}} w(y) \leq \max\{0, \max_{y\in\partial\Omega} g(y)\} \leq \|g\|_\infty .$$

Mit der Teilaufgabe (b) folgt

$$w(x) \geq \min_{y\in\overline{\Omega}} w(y) \geq \min\{0, \min_{y\in\partial\Omega} g(y)\} \geq -\|g\|_\infty .$$

Insgesamt gilt also für alle $x \in \overline{\Omega}$

$$|w(x)| \leq \|g\|_\infty ,$$

also, wie es zu zeigen war: $\|u_1 - u_2\|_\infty \leq \|g_1 - g_2\|_\infty$

□

Aufgabe 13:
Betrachten Sie in $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 | \, \|x\|_2 < 1\}$ das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$. Für eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ergibt die Forderung $u|_{\partial\Omega} = g$ einen Sinn. Für eine Lösung $u \in H^1(\Omega)$ der zugehörigen *schwachen Formulierung* ist diese Forderung hingegen nicht sinnvoll. Ziel dieser Aufgabe ist es, den *Spuroperator* T zu definieren, welcher die Vorgabe von Randwerten für schwache Lösungen ermöglicht.

(a) Sei $T : H^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega)$ definiert durch:

$$Tu = u|_{\partial\Omega}$$

Zeigen Sie, dass T ein stetiger linearer Operator im folgenden Sinn ist: Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\|Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1}$$

für alle $u \in H^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ausfällt.

Hinweis: Fassen Sie $\int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 \, \mathrm{dx}$ als Oberflächenintegral einer geschickt gewählten vektorwertigen Funktion auf und benutzen Sie den Satz von Gauß.

(b) Setzen Sie T eindeutig zum stetigen linearen Operator $\overline{T} : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ fort. Zeigen Sie, dass

$$\overline{T}u = u|_{\partial\Omega}$$

für alle $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gilt.

Hinweis: $H^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ist dicht in $H^1(\Omega)$.

Bemerkung: $\overline{T}u$ wird die *Spur* der $H^1(\Omega)$-Funktion u genannt.

(c) Zeigen Sie, dass eine $L^2(\Omega)$-Funktion im Allgemeinen keine Spur hat. D.h. es existiert kein stetiger linearer Operator $S : L^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ mit

$$Su = u|_{\partial\Omega}$$

für alle $u \in L^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Lösung:

(a) Wir suchen zunächst eine $C^1(\overline{\Omega})$-*Cutoff*-Funktion Ψ, die den folgenden Bedingungen genügt:

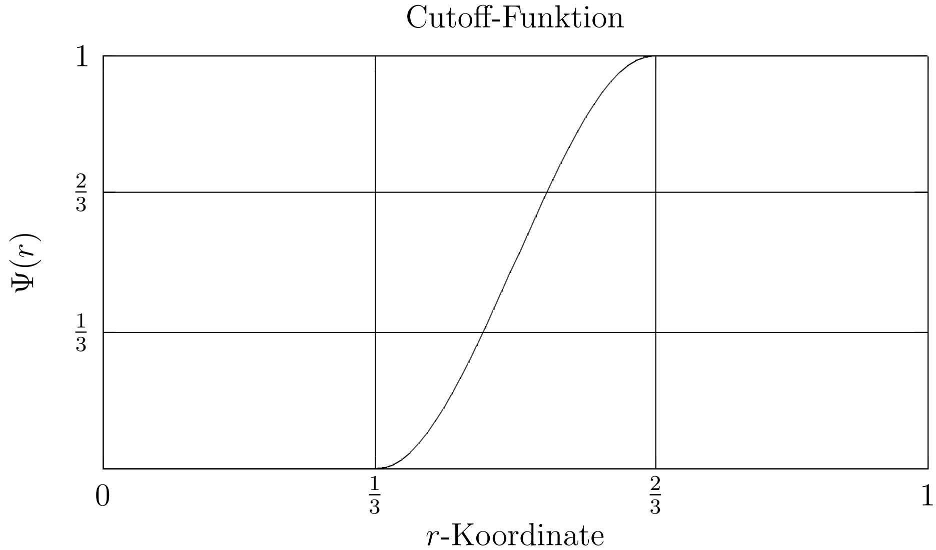
(i) $0 \leq \Psi \leq 1$

(ii) $\Psi|_{B_{\frac{1}{3}}(0)} \equiv 0$

(iii) $\Psi|_{B_1(0) \setminus B_{\frac{2}{3}}(0)} \equiv 1$

Ein solches Ψ ist gegeben durch (3D-Kugelkoordinaten):

$$\Psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < r < \frac{1}{3} \\ 27\left(r - \frac{1}{3}\right)^2 - 54\left(r - \frac{1}{3}\right)^3 & \text{für } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3} \\ 1 & \text{für } \frac{2}{3} < r \leq 1 \end{cases}.$$



Man erhält es, indem man das Interpolationsproblem

(i) $P\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

(ii) $P'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

(iii) $P\left(\frac{2}{3}\right) = 1$

(iv) $P'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$

durch ein Polynom dritten Grades löst.

Sei $C_1 := \|\nabla\Psi\|_\infty$. Für alle $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\|\Psi u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\Psi u|^2 + |\nabla \Psi u|^2 \,\mathrm{dx} \\
&= \int_\Omega |\Psi u|^2 + |\Psi \nabla u + u \nabla \Psi|^2 \,\mathrm{dx} \\
&\leq \int_\Omega |u|^2 + \left(|\nabla u| + |u| \underbrace{|\nabla \Psi|}_{\leq C_1} \right)^2 \mathrm{dx} \\
&\leq \int_\Omega (1 + C_1^2)\, |u|^2 + 2\, |u|\, |\nabla u| + |\nabla u|^2 \,\mathrm{dx} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} (1 + C_1^2)\, \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + 2 \underbrace{\sqrt{\int_\Omega |u|^2 \,\mathrm{dx}}}_{\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}} \underbrace{\sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{dx}}}_{\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}} \\
&\leq \underbrace{(3 + C_1^2)}_{=:C_2^2} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Definiere $\Omega' := B_1(0) \setminus B_{\frac{1}{3}}(0)$. Sei $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ beliebig. Wegen $Tu = T\Psi u = u|_{\partial\Omega}$ und (1), ist o.B.d.A. $u|_{B_{\frac{1}{3}}(0)} \equiv 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_2^2 &= \int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 \, \mathrm{d}S_x \\
&= \int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 \underbrace{e_r(x) \cdot \nu(x)}_{=1} \mathrm{d}S_x \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(|u|^2 e_r\right) \mathrm{dx} = \int_{\Omega'} \nabla \cdot \left(|u|^2 e_r\right) \mathrm{dx} \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{\Omega'} \left(\nabla |u|^2\right) \cdot e_r + |u|^2 \underbrace{\nabla \cdot e_r}_{=\frac{2}{|x|} \leq 6} \mathrm{dx} \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{\leq} \int_{\Omega'} 2u \left(\nabla u\right) \cdot e_r + 6 \, |u|^2 \, \mathrm{dx} \\
&\overset{\text{CSU}}{\leq} 2 \int_{\Omega'} |u| \, |\nabla u| \, \mathrm{dx} + 6 \int_{\Omega'} |u|^2 \, \mathrm{dx} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} 2 \underbrace{\sqrt{\int_{\Omega} |u|^2 \, \mathrm{dx}}}_{\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}} \underbrace{\sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, \mathrm{dx}}}_{\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}} + 6 \underbrace{\int_{\Omega} |u|^2 \, \mathrm{dx}}_{\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2} \\
&\leq 8 \, \|u\|_{H^1(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Wurzelziehen liefert die Behauptung.

(b) Sei $u \in H^1(\Omega)$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $C^1(\overline{\Omega})$ dicht in $H^1(\Omega)$ liegt. Es existiert also eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^1(\overline{\Omega})^{\mathbb{N}}$ mit

$$u_n \overset{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}{\to} u$$

für $n \to \infty$. Also ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Wegen

$$\|Tu_n - Tu_m\|_{L^2(\partial\Omega)} \overset{\text{(a)}}{\leq} C \, \|u_n - u_m\|_{H^1(\Omega)} \qquad (n, m \in \mathbb{N}),$$

ist $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\partial\Omega)$. Sei $\overline{T}u \in L^2(\partial\Omega)$ ihr Grenzwert.

Dieser ist unabhängig von der Wahl der Approximationsfolge, denn: Sei etwa

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^1(\overline{\Omega})^{\mathbb{N}}$ eine weitere Folge mit $v_n \overset{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}{\to} u$ für $n \to \infty$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\left|\overline{T}u - \lim_{n\to\infty} Tv_n\right| &= \left|\lim_{n\to\infty} Tu_n - \lim_{n\to\infty} Tv_n\right| \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} |T(u_n - v_n)| \\ &\overset{(a)}{\leq} C \lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\|_{H^1(\Omega)} \\ &= 0\end{aligned}$$

Also ist $\overline{T} : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ wohldefiniert und offensichtlich linear.
Ferner ist $\overline{T}$ stetig, denn: Sei $u \in H^1(\Omega)$ beliebig und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^1(\overline{\Omega})^{\mathbb{N}}$ mit $u_n \overset{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}{\to} u$. Es gilt

$$\begin{aligned}\left\|\overline{T}u\right\|_{L^2(\partial\Omega)} &= \left\|\lim_{n\to\infty} Tu_n\right\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|Tu_n\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\overset{(a)}{\leq} \limsup_{n\to\infty} C \|u_n\|_{H^1(\Omega)} \\ &= C \|u\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Schließlich sei $u \in H^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$. Dann ist $\overline{T}u = u|_{\partial\Omega}$, denn: Da u ist stetig auf der abgeschlossenen Menge $\overline{\Omega}$, existiert nach dem Fortsetzungssatz von Tietze eine stetige Fortsetzung $\overline{u}$ von u auf ganz $\mathbb{R}^3$. Sei $(\varphi_\delta)_{\delta>0}$ ein *glättender Kern.* Betrachten wir $u_\delta = (\varphi_\delta * \overline{u})|_{\overline{\Omega}}$. Dann gilt

(i) $u_\delta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ für alle $\delta > 0$,

(ii) $u_\delta \to u$ für $\delta \to 0+$ in $\|\cdot\|_\infty$,

(iii) und für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$ mit $|\alpha| \leq 1$ ist $D^\alpha u_\delta \to D^\alpha u$ in $\|\cdot\|_2$ für $\delta \to 0+$.

Also ist $u_\delta \to u$ für $\delta \to 0+$ in $H^1(\Omega)$. Damit gilt

$$\overline{T}u = \lim_{\delta\to 0+} \overline{T}u_\delta = \lim_{\delta\to 0+} u_\delta|_{\partial\Omega} \text{ in } L^2(\partial\Omega).$$

Aber $u_\delta|_{\partial\Omega} \to u|_{\partial\Omega}$ für $\delta \to 0+$ in $\|\cdot\|_\infty$, also erst recht in $\|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)}$. Wegen der Eindeutigkeit der Grenzwerte folgt $\overline{T}u = u|_{\partial\Omega}$.

(c) Angenommen, es existiert ein solcher Operator S. Betrachte die Folge stetiger Funktionen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch (3D-Kugelkoordinaten) $u_n(r) = r^n$ für alle $r \in [0, 1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Für die Folge der $L^2(\Omega)$-Normen gilt

$$\|u_n\|_2^2 = \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \int_0^1 r^{2n} r^2 \sin(\theta) \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta = 4\pi \int_0^1 r^{2n+2} \mathrm{d}r = \frac{4\pi}{2n+3} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Aber

$$\|Su_n\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = \|u_n|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = 4\pi$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist für kein $C > 0$ die Ungleichung $\|Su\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\,\|u\|_2$ für alle $u \in L^2(\Omega)$ erfüllt.

$\square$

http://numhpc.math.kit.edu/1375.php