Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

Lösungsvorschlag für das

6. Übungsblatt

Aufgabe 14:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Betrachten Sie den Differentialoperator $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ definiert durch

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{d} \left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u(x) \qquad \left(x \in \Omega, u \in C^2(\Omega)\right) \quad (1)$$

mit $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ und $b_i, c \in C(\overline{\Omega})$ für alle $i, j \in \{1, \dots, d\}$. Man nennt L in der Darstellung (1) einen *Operator in Divergenzform.*

(a) Sei $\alpha : C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, die durch

$$\alpha(u, v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i u_{x_i} v + cuv\mathrm{d}x \qquad (2)$$

für alle $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ definiert wird. Zeigen Sie:

$$\alpha(u, v) = \int_\Omega Lu(x)v(x)\mathrm{d}x \qquad (u, v \in C_0^\infty(\Omega))$$

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Gauß.

(b) Zeigen Sie, dass α in der $H^1(\Omega)$-Norm stetig ist, d.h., dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} |\alpha(u, v)| &\leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &= C\sqrt{\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 \, dx\right) \cdot \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 + |v(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)} \end{aligned}$$

für alle $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ ausfällt. Setzen Sie α dann zur stetigen Bilinearform $\overline{\alpha} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ fort.

Hinweis: Benutzen Sie die Höldersche Ungleichung. Bedenken Sie, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ liegt.

(c) Für diese Teilaufgabe sei $b_i \equiv 0$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$, $c \geq 0$ und der Operator L sei *gleichmäßig elliptisch* in Ω, d.h. es existiert eine Konstante $k > 0$ so dass

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq k\,|\xi|^2$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt. Zeigen Sie, dass die Bilinearform $\overline{\alpha}$ aus Teilaufgabe (b) koerziv ist.

Hinweis: Es reicht die nötige Ungleichung für α zu beweisen. Sie überträgt sich aus Stetigkeitsgründen auf $\overline{\alpha}$.

Lösung:

(a) Es gilt für alle $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega Lu(x)v(x)\mathrm{dx} &= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} \left(a_{ij}(x)u_{x_i}(x)\right)_{x_j} v(x)\mathrm{dx} && (3)\\
&\quad + \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} b_i(x)u_{x_i}(x)v(x)\mathrm{dx} && (4)\\
&\quad + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\mathrm{dx} && (5)
\end{aligned}$$

Wir halten zunächst fest, dass alle vorkommenden Integrale existieren, da die Integration nur über das Kompaktum $\operatorname{supp} v \subseteq \Omega$ ausgeführt wird und die Integranden dort stetig und damit beschränkt sind. Ferner tauchen die Terme (4) und (5) genauso in der Definition von α auf.

Ferner gilt, wie es zu zeigen war:

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} \left(a_{ij}(x)u_{x_i}(x)\right)_{x_j} v(x)\mathrm{dx} &= -\int_\Omega \nabla \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)u_{x_i}(x)e_j\right) v(x)\mathrm{dx}\\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)u_{x_i}(x)e_j\right) \cdot \nabla v(x)\mathrm{dx}\\
&\quad \underbrace{-\int_{\partial\Omega} v(x) \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)u_{x_i}(x)e_j\right)\mathrm{dx}}_{=0,\text{ da } v\equiv 0 \text{ auf } \partial\Omega}\\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)u_{x_i}(x)v_{x_j}(x)\right)\mathrm{dx}
\end{aligned}$$

(b) Seien wieder $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Ferner bezeichne $C_1 = \max_{i,j\in\{1,\dots d\}} \|a_{ij}\|_\infty$, $C_2 = \max_{i\in\{1,\dots d\}} \|b_i\|_\infty$, $C_3 = \|c\|_\infty$ und $C = dC_1 + \sqrt{d}C_2 + C_3$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
|\alpha(u,v)| \quad &\leq \quad C_1 \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^d |u_{x_i}(x)| \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^d \left|v_{x_j}(x)\right| \right) \mathrm{dx} \\
&\quad + C_2 \int_\Omega \sum_{i=1}^d |u_{x_i}(x)| \cdot |v(x)| \, \mathrm{dx} \\
&\quad + C_3 \int_\Omega |u(x)| \cdot |v(x)| \, \mathrm{dx} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \quad C_1 \sqrt{\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^d |u_{x_i}(x)| \right)^2 \mathrm{dx}} \cdot \sqrt{\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^d \left|v_{x_j}(x)\right| \right)^2 \mathrm{dx}} \\
&\quad + C_2 \sqrt{\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^d |u_{x_i}(x)| \right)^2 \mathrm{dx}} \cdot \sqrt{\int_\Omega |v(x)|^2 \, \mathrm{dx}} \\
&\quad + C_3 \sqrt{\int_\Omega |u(x)|^2 \, \mathrm{dx}} \cdot \sqrt{\int_\Omega |v(x)|^2 \, \mathrm{dx}} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \quad C_1 \sqrt{\int_\Omega d \sum_{i=1}^d |u_{x_i}(x)|^2 \, \mathrm{dx}} \cdot \sqrt{\int_\Omega d \sum_{j=1}^d \left|v_{x_j}(x)\right|^2 \mathrm{dx}} \\
&\quad + C_2 \sqrt{\int_\Omega d \sum_{i=1}^d |u_{x_i}(x)|^2 \, \mathrm{dx}} \cdot \sqrt{\int_\Omega |v(x)|^2 \, \mathrm{dx}} \\
&\quad + C_3 \sqrt{\int_\Omega |u(x)|^2 \, \mathrm{dx}} \cdot \sqrt{\int_\Omega |v(x)|^2 \, \mathrm{dx}} \\
&\leq \quad C_1 d \sqrt{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 \, \mathrm{dx}} \cdot \sqrt{\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 + |v(x)|^2 \, \mathrm{dx}} \\
&\quad + C_2 \sqrt{d} \sqrt{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2} \cdot \sqrt{\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 + |v(x)|^2 \, \mathrm{dx}} \\
&\quad + C_3 \sqrt{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 \, \mathrm{dx}} \cdot \sqrt{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + |v(x)|^2 \, \mathrm{dx}} \\
&= \quad C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Also ist α stetig. Seien jetzt $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ liegt, existieren die Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_n \overset{n\to\infty}{\to} u$ und $v_n \overset{n\to\infty}{\to} v$ in

$\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$-Norm. Damit sind sie Cauchy-Folgen bezüglich der $H^1(\Omega)$-Norm und als solche beschränkt, etwa $\|u_n\|_{H^1(\Omega)}, \|v_n\|_{H^1(\Omega)} \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\alpha(u_n, v_n) - \alpha(u_m, v_m)| &\leq |\alpha(u_n - u_m, v_n)| + |\alpha(u_m, v_n - v_m)| \\ &\leq CM\left(\|u_n - u_m\| + \|v_n - v_m\|\right), \end{aligned}$$

ist auch $(\alpha(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge (in $\mathbb{R}$). Definiere

$$\overline{\alpha(u, v)} = \lim_{n\to\infty} \alpha(u_n, v_n).$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denn: Seien etwa $(\hat{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\hat{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei weitere Folgen, die gegen u bzw. v in $H_0^1(\Omega)$ konvergieren und durch $\hat{M}$ in $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ beschränkt sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left|\lim_{n\to\infty} \alpha(u_n, v_n) - \lim_{n\to\infty} \alpha(\hat{u}_n, \hat{v}_n)\right| &\leq \limsup_{n\to\infty} |\alpha(u_n - \hat{u}_n, v_n)| + |\alpha(\hat{u}_n, v_n - \hat{v}_n)| \\ &\leq C\hat{M} \limsup_{n\to\infty} \left(\|u_n - \hat{u}_n\|_{H^1(\Omega)} + \|v_n - \hat{v}_n\|_{H^1(\Omega)}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Stetigkeitsabschätzung überträgt sich auf die Fortsetzung $\overline{\alpha}$.

(c) Sei $C_\Omega > 0$ die Poincaré-Konstante von Ω. Mit dieser gilt für alle $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \leq (1 + C_\Omega^2)\, \|\nabla u\|_2^2,$$

also $\|\nabla u\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{1+C_\Omega^2}} \|u\|_{H^1(\Omega)}$. Sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Es gilt:

$$\alpha(u, u) = \int_\Omega \underbrace{\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) u_{x_i}(x) u_{x_j}(x)}_{\geq k|\nabla u|^2} \,\mathrm{dx} + \underbrace{\int_\Omega c(x)\, |u(x)|^2 \,\mathrm{dx}}_{\geq 0} \geq \frac{k}{1 + C_\Omega^2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

Diese Abschätzung überträgt sich aus Stetigkeitsgründen auf $\overline{\alpha}$.

□

Aufgabe 15:
Betrachten Sie in $\Omega = (0,1)$ das Dirichlet-Problem

$$Lu(x) := -u''(x) + u(x) = 2x =: f(x) \quad (x \in \Omega), \qquad u(0) = u(1) = 0. \qquad (6)$$

(a) Bestimmen Sie eine klassische Lösung der Randwertaufgabe (6).

Hinweis: Die durch $u_{\text{part}}(x) = 2x$ definierte Funktion löst die Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die schwache Formulierung (stetige koerzive Bilinearform für den Differentialoperator L und stetiges lineares Funktional für die rechte Seite f) der Randwertaufgabe (6) in $H_0^1(\Omega)$.

Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse der Aufgabe 14.

(c) Für $N \in \mathbb{N}$ seien $h = \frac{1}{N}$ und $x_k = hk$ für $k \in I := \{0, \dots, N\}$. Ferner sei die *Hutfunktion* $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definert durch $\Psi(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie den *Ansatzraum*

$$V_h = \left\{ f \in C(\overline{\Omega}) | f(0) = f(1) = 0, \forall k \in I \setminus \{N\} : f|_{[x_k, x_{k+1}]} \text{ ist linear} \right\} \subseteq H_0^1(\Omega)$$

mit der Basis $B_h := \{\Psi_1, \dots \Psi_{N-1}\}$. Dabei sind die Funktionen $\Psi_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Psi_k(x) = \Psi\left(\frac{x - x_k}{h}\right) \qquad (x \in [0,1])$$

für alle $k \in I \setminus \{0, N\}$. Bestimmen Sie für $N \geq 2$ die Steifigkeitsmatrix sowie den Lastvektor in der Basis B_h für die schwache Formulierung aus Teilaufgabe (b).

(d) Lösen Sie das diskretisierte Problem aus (c) mit Hilfe eines Computers für $N \in \{10, 20\}$ und drucken Sie einen Plot der exakten und approximativen Lösungen.

Lösung:

(a) Die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$-u'' + u = 0$$

hat einen zweidimensionalen Lösungsraum, der von den Funktionen cosh und sinh aufgespannt wird. Damit ist die Lösung der Differentialgleichung in (6) gegeben durch

$$u(x) = A\cosh(x) + B\sinh(x) + 2x$$

für alle $x \in \overline{\Omega}$. Die Konstanten A und B werden durch die Randwerte fixiert:

$$u(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \qquad u(1) = 0 \Rightarrow B = -\frac{2}{\sinh(1)} \approx -1,7$$

(b) Nach Aufgabe 14, ist die stetige koerzive Bilinearform α gegeben durch

$$\alpha(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{dx} + \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{dx}$$

für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Die stetige Linearform l für die rechte Seite ist, wie in der Vorlesung, gegeben durch

$$l(u) = 2\int_0^1 u(x)x\mathrm{dx}$$

für alle $u \in H_0^1(\Omega)$.

(c) Für den Lastvektor $b \in \mathbb{R}^{N-1}$ ergibt sich definitionsgemäß:

$$\begin{aligned}
b_k &= l(\Psi_k) \\
&= 2\int_0^1 \Psi_k(x)x\mathrm{dx} \\
&= 2\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \Psi\left(\frac{x-x_k}{h}\right) x\mathrm{dx} \\
&= 2\int_{-h}^{h} \Psi\left(\frac{x}{h}\right)(x+x_k)\mathrm{dx} \\
&= 2h\int_{-1}^{1}(hx+x_k)\Psi(x)\mathrm{dx} = 2h^2\underbrace{\int_{-1}^{1} x\Psi(x)\mathrm{dx}}_{=0} + 2hx_k\underbrace{\int_{-1}^{1}\Psi(x)\mathrm{dx}}_{=1} \\
&= 2h^2k = \frac{2k}{N^2} \qquad (k \in \{1,\dots,N-1\})
\end{aligned}$$

Für die Steifigkeitsmatrix $A \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ gilt definitionsgemäß:

$$A_{ij} = \alpha(\Psi_i,\Psi_k) = \underbrace{\int_0^1 \Psi_i'(x)\Psi_j'(x)\mathrm{dx}}_{=:B_{ij}} + \underbrace{\int_0^1 \Psi_i(x)\Psi_j(x)\mathrm{dx}}_{=:C_{ij}} \qquad (i,j \in \{1,\dots,N-1\})$$

Es ist klar, dass die Matrizen A, B und C symmetrisch sind. Ferner ist für alle $i, j \in \{1,\dots,N-1\}$ mit $|i-j| > 1$ bereits $A_{ij} = B_{ij} = C_{ij} = 0$ (*Tridiagonalmatrizen*). Schließlich ist $B_{ii} = B_{11}$, $C_{ii} = C_{11}$ für alle $i \in \{1,\dots,N-1\}$ sowie $B_{i,i+1} = B_{12}$, $C_{i,i+1} = C_{12}$ für alle $i \in \{1,\dots,N-2\}$.

Ferner gilt für die schwache Ableitung von Ψ:

$$\Psi'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \le x < 0 \\ -1 & \text{für } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Damit ergibt sich für die Matrix B

$$B_{11} = \int_0^1 |\Psi_1'(x)|^2 \, \mathrm{dx} = \int_0^1 \left| \partial_x \Psi \left(\frac{x-h}{h} \right) \right|^2 \mathrm{dx} = \frac{2h}{h^2} = \frac{2}{h} = 2N,$$

sowie

$$B_{12} = \int_0^1 \Psi_1'(x)\Psi_2'(x)\mathrm{dx} = \frac{1}{h^2}\int_0^1 \Psi'\left(\frac{x-h}{h}\right)\Psi'\left(\frac{x-2h}{h}\right)\mathrm{dx} = -\frac{h}{h^2} = -\frac{1}{h} = -N.$$

Für die Matrix C gilt entsprechend

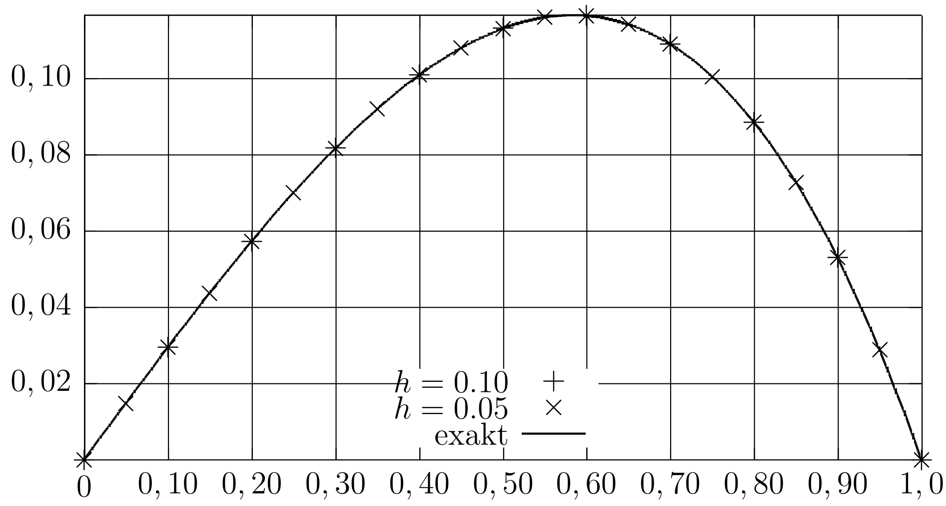
$$\begin{aligned} C_{11} &= \int_0^1 \Psi_1^2(x)\mathrm{dx} = \int_0^{2h} \Psi^2\left(\frac{x-h}{h}\right)\mathrm{dx} \\ &= \int_{-h}^{h} \Psi^2\left(\frac{x}{h}\right)\mathrm{dx} = h\int_{-1}^{1}\Psi^2(x)\mathrm{dx} \\ &= 2h\int_0^1 \Psi^2(x)\mathrm{dx} = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3N}, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} C_{12} &= \int_0^1 \Psi_1(x)\Psi_2(x)\mathrm{dx} = \int_h^{2h} \Psi\left(\frac{x-h}{h}\right)\Psi\left(\frac{x-2h}{h}\right)\mathrm{dx} = \int_h^{2h} \frac{2h-x}{h}\cdot\frac{x-h}{h}\mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{h^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\frac{h}{2}-x)\cdot(\frac{h}{2}+x)\mathrm{dx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{4} - \left(\frac{x}{h}\right)^2 \mathrm{dx} = \frac{h}{4} - h\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2\mathrm{dx} = \frac{h}{6} = \frac{1}{6N}. \end{aligned}$$

(d) Die Programme zur Erzeugung des Plots finden Sie auf der Homepage.

Analytische und numerische Lösungen



□

http://numhpc.math.kit.edu/1375.php