Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

Lösungsvorschlag für das

7. Übungsblatt

Aufgabe 16:
Betrachten Sie die Folgenräume:

$$l^p = \begin{cases} \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \middle| \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\right\} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \middle| \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\right\} & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

Sei $p \leq q$. Aus der Vorlesung über Funktionalanalysis ist $l^p \subseteq l^q$ bekannt. Untersuchen Sie die Einbettung $\iota : l^p \hookrightarrow l^q$ auf

(a) Stetigkeit und

(b) Kompaktheit.

Lösung:

(a) Die Einbettung ι ist stetig mit Stetigkeitskonstante $C \leq 1$, also

$$\left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_q \leq \left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p \qquad ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p), \tag{1}$$

denn: für $q = \infty$ ist (1) trivial. Also sei O.B.d.A. $1 \leq p < q < \infty$ und $0 \neq (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$. Wegen $a^{\frac{q}{p}} \leq a$ für alle $a \leq 1$, gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_q}{\left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p}\right)^q &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p}\right)^{\frac{q}{p}} |x_n|^q \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{|x_n|^p}{\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p}\right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n|^p}{\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b) Die Einbettung ι ist nicht kompakt. Betrachte etwa die Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (l^p)^{\mathbb{N}}$ definiert durch

$$x^k = e_k = (0,\dots,0,\underbrace{1}_{k\text{-te Stelle}},0,\dots) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Dann ist $\left\|x^k\right\|_p = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Aber, wegen $\left\|x^k - x^l\right\|_q = 2^{\frac{1}{q}} > 0$ für alle $k \neq l$, hat $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine $\|\cdot\|_q$-konvergenten Teilfolgen.

□

Aufgabe 17:
Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$ ein beschränktes, zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet, welches eine Kegelbedingung erfüllt. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $u \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\left\| u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \mathrm{dx} \right\|_2 \leq C \left\|\nabla u\right\|_2$$

Dabei bezeichnet $|\Omega| = \lambda^d(\Omega)$ das Lebesgue-Maß von Ω.

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und benutzen Sie den Rellichschen Auswahlsatz. Sie können ohne Beweis verwenden, dass ein $v \in H^1(\Omega)$ mit $\nabla v = 0$ konstant ist.

Bemerkung: Diese Ungleichung verallgemeinert die Poincaré-Ungleichung.

Lösung:
Angenommen die Aussage wäre falsch. Dann gäbe es eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H^1(\Omega)$ mit

$$\left\| u_n - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_n \mathrm{dx} \right\|_2 > n \left\|\nabla u_n\right\|_2 \tag{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ durch

$$v_n = \frac{u_n - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_n \mathrm{dx}}{\underbrace{\left\| u_n - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_n \mathrm{dx} \right\|_2}_{>0}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist $\left\|v_n\right\|_2 = 1$ und $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v_n \mathrm{dx} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner folgt aus (2)

$$\left\|\nabla v_n\right\|_2 < \frac{1}{n}, \tag{3}$$

und damit $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|v_n\|_2^2 + \|\nabla v_n\|_2^2} < \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \leq \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Also ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $H^1(\Omega)$. Nach dem Rellichschen Auswahlsatz besitzt $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ konvergente Teilfolge $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.
Wegen (3) ist diese Teilfolge auch in $H^1(\Omega)$ konvergent, etwa $v_{n_k} \overset{k\to\infty}{\to} v \in H^1(\Omega)$ und $\nabla v = 0$. Also ist v konstant. Aus Stetigkeitsgründen gilt $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v \mathrm{dx} = 0$. Also ist $v = 0$. Aber, ebenfalls aus Stetigkeitsgründen, gilt $\|v\|_2 = 1$.
□

Aufgabe 18:
Sei $\Omega = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres endliches Intervall.

(a) Sei $u \in C^1(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Zeigen Sie

$$|u(x) - u(y)| \leq \sqrt{|x-y|}\, \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

für alle $x, y \in \Omega$.

Hinweis: Benutzen Sie den „Trick“ aus Aufgabe 4.

(b) Sei $u \in C^1(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass u sich eindeutig zu einer stetigen Funktion $\overline{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ fortsetzen lässt.

Hinweis: Benutzen Sie die Teilaufgabe (a).

(c) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$-beschränkte Folge in $H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$. Ferner möge für ein festes $x_0 \in \Omega$ die Folge $(u_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sein. Zeigen Sie, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm auf $C(\overline{\Omega})$ beschränkt ist.

Hinweis: Benutzen Sie wieder die Teilaufgabe (a).

(d) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$-beschränkte Folge in $H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass sie gleichgradig stetig ist, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \forall x, y \in \overline{\Omega} : |x-y| < \delta \Rightarrow |u_n(x) - u_n(y)| < \varepsilon.$$

Hinweis: Benutzen Sie schon wieder die Teilaufgabe (a).

(e) Sei $u \in H^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $v \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ existiert, so dass $\|u - v\|_{H^1(\Omega)} = 0$ gilt.

Hinweis: Bedenken Sie, dass $C^1(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ dicht liegt in $H^1(\Omega)$. Ferner ist aus den Vorlesungen über Analysis bekannt, dass jede konvergente Folge in $L^2(\Omega)$, eine punktweise fast überall konvergente Teilfolge besitzt. Benutzen Sie alle vorhergehenden Teilaufgaben und den Satz von Arzelà-Ascoli (siehe unten).

Bemerkung: Diese Aufgabe rechtfertigt die Schreibweise $H^1(\Omega) \subseteq C(\Omega)$.

Satz von Arzelà-Ascoli:
Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(K)^{\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen die

(i) bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm beschränkt und

(ii) gleichgradig stetig ist.

Dann besitzt $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Lösung:

(a) Seien $x \leq y \in \Omega$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\leq \int_x^y |u'(z)| \,\mathrm{dz} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \sqrt{y-x}\sqrt{\int_x^y |u'(z)|^2 \,\mathrm{dz}} \leq \sqrt{y-x}\sqrt{\int_a^b |u'(z)|^2 \,\mathrm{dz}} \\
&\leq \sqrt{|x-y|}\, \|u\|_{H^1(\Omega)} \qquad (4)
\end{aligned}$$

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$ konvergent gegen a. Als konvergente Folge, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Nach (4) ist wegen

$$|u(x_n) - u(x_m)| \leq \underbrace{\sqrt{x_n - x_m}}_{\substack{n,m\to\infty \\ \to 0}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \overset{n,m\to\infty}{\to} 0$$

auch $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge (in $\mathbb{R}$) und als solche konvergent. Der einzige Kandidat für $\overline{u}(a)$ ist also $\lim_{n\to\infty} u(x_n)$. Mit dieser Fortsetzung ist $\overline{u}$ auch stetig in a, denn:

Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$ eine weitere Folge, die gegen a konvergiert. Dann gilt:

$$\left|\overline{u}(a) - \lim_{n\to\infty} u(y_n)\right| = \lim_{n\to\infty} |u(x_n) - u(y_n)| \overset{(4)}{\leq} \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \sqrt{|x_n - y_n|}}_{=0} \|u\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

Die (eindeutige) Fortsetzung in b erfolgt analog.

Die Abschätzung (4) gilt aus Stetigkeitsgründen für $\overline{u}$ auf $\overline{\Omega}$.

(c) Seien $C_1, C_2 > 0$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n(x_0)| \leq C_1 \qquad \|u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2$$

ausfällt. Seien nun $x \in \overline{\Omega}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt:

$$|u_n(x)| \leq \underbrace{|u_n(x_0)|}_{\leq C_1} + |u(x) - u(x_0)| \overset{(4)}{\leq} C_1 + \underbrace{\sqrt{x - x_0}}_{\leq\sqrt{|a-b|}} \underbrace{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}}_{\leq C_2} \leq C_1 + \sqrt{|a-b|}C_2$$

Da die Abschätzung unabhängig von $x \in \overline{\Omega}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die Behauptung: $\|u_n\|_\infty \leq C_1 + \sqrt{|a-b|}C_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(d) Sei C_2 wie in der Lösung zur Teilaufgabe (c). Betrache ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Definiere $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C_2}\right)^2 > 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \overline{\Omega}$ mit $|x-y| < \delta$:

$$|u_n(x) - u_n(y)| \overset{(4)}{\leq} \underbrace{\sqrt{|x-y|}}_{<\frac{\varepsilon}{C_2}} \underbrace{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}}_{\leq C_2} < \varepsilon$$

(e) Da $C^1(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ dicht in $H^1(\Omega)$ liegt, existiert in $C^1(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die bezüglich der $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$-Norm gegen u konvergiert.

Nach Teilaufgabe (b), ist O.B.d.A. $u_n \in C(\overline{\Omega})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Da die $\|\cdot\|_2$-Norm schwächer ist als die $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$-Norm, ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere in $L^2(\Omega)$ gegen u konvergiert. Deshalb existiert eine fast-überall punktweise konvergente Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. O.B.d.A. existiert also eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H^1(\Omega) \cap C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, die in $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$-Norm gegen u und fast-überall punktweise konvergiert.

Da $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast-überall konvergiert, existiert ein $x_0 \in \Omega$, für welches $(u_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und erst recht beschränkt ist. Ferner ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$-konvergente Folge erst recht $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$-beschränkt. Nach Teilaufgabe (c) ist also $(u_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\overline{\Omega}$ im $\|\cdot\|_\infty$-Sinn beschränkt.

Ferner erfüllt $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen der Teilaufgabe (d) und ist damit gleichgradig stetig.

Insgesamt erfüllt $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzelà-Ascoli und besitzt damit eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen, ist $v = \lim_{k\to\infty} u_{n_k}$ eine stetige Funktion. Schließlich gilt:

$$\|u - v\|_{H^1(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \|u - u_{n_k}\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

□