Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

Lösungsvorschlag für das

8. Übungsblatt

Aufgabe 19:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$ ein beschränktes, zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet, welches eine Kegelbedingung erfüllt.

(a) Betrachten Sie den Interpolationsoperator $I : H^1(\Omega) \to \mathcal{P}_0 \subseteq H^1(\Omega)$ definiert durch

$$Iu = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x) \mathrm{dx}.$$

Zeigen Sie: I ist ein stetiger linearer Operator.

(b) Sei $L : H^1(\Omega) \to Y$ ein stetiger linearer Operator in den normierten Raum $(Y, \|\cdot\|_Y)$ mit $\mathcal{P}_0 \subseteq \ker L$. Zeigen Sie: es existiert eine Konstante $C = C(\Omega) > 0$, so dass

$$\|Lu\|_Y \leq C \|L\| \|\nabla u\|_2$$

für alle $u \in H^1(\Omega)$ ausfällt.

Hinweis: Benutzen Sie den Operator I aus Teilaufgabe (b) und Aufgabe 17.

Bemerkung: Dies ist das Bramble-Hilbert-Lemma für $t = 1$.

Lösung:

(a) Sei $u \in H^1(\Omega)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|Iu\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega |Iu|^2 + \underbrace{|\nabla Iu|^2}_{=0} \mathrm{dx} \\
&\leq \frac{1}{|\Omega|^2} \int_\Omega \left(\int_\Omega 1 \cdot |u(x)| \, \mathrm{dx} \right)^2 \mathrm{dy} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{1}{|\Omega|^2} \int_\Omega \int_\Omega 1^2 \mathrm{dx} \cdot \int_\Omega |u(x)|^2 \, \mathrm{dxdy} \\
&\leq \int_\Omega |u(x)|^2 \, \mathrm{dx} \\
&\leq \|u\|^2_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Wurzelziehen liefert die Behauptung.

(b) Nach Aufgabe 17, existiert eine Konstante $C(\Omega) > 0$ derart, dass

$$\|u - Iu\|_2^2 \leq C^2(\Omega)\, \|\nabla u\|_2^2\,,$$

also insbesondere

$$\|u - Iu\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \left(1 + C(\Omega)^2\right) \|\nabla u\|_2^2$$

für alle $u \in H^1(\Omega)$ ausfällt. Wegen $\mathcal{P}_0 \subseteq \ker L$ und der Stetigkeit von L gilt:

$$\|Lu\|_Y = \|L(u - Iu)\|_Y \leq \|L\|\, \|u - Iu\|_{H^1(\Omega)} \leq \|L\| \sqrt{1 + C(\Omega)^2}\, \|\nabla u\|_2$$

□

Aufgabe 20:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein polygonales Gebiet und τ_h eine quasiuniforme Triangulierung von Ω. Nach dem Approximationssatz aus der Vorlesung, gilt für die Interpolation durch stückweise lineare Funktionen I_h mit einer Konstante $C = C(\Omega)$ die Abschätzung

$$\|I_h u\|_{2,h} \leq C\, \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

für alle $u \in H^2(\Omega)$.
Zeigen Sie durch Gegenbeispiel, dass für keine Konstante $C > 0$ die Abschätzung

$$\|I_h u\|_{0,h} \leq C\, \|u\|_{H^0(\Omega)}$$

für alle $u \in H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ gültig ist.

Lösung:
Sei x_0 ein beliebiger Interpolationspunkt. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Funktion

$$u_n = n \cdot \mathbb{1}_{B_{\frac{1}{n}}(x_0)}.$$

Für hinreichend großes $n \geq N$ liegt in $B_{\frac{1}{n}}(x_0)$ kein weiterer Interpolationspunkt außer x_0. Wegen der Interpolationseigenschaft gilt

$$\|I_h u_n\|_{0,h} = \frac{n}{N} \cdot \underbrace{\|I_h u_N\|_{0,h}}_{=:C_1>0} \geq \frac{n}{N} \cdot C_1 \overset{n\to\infty}{\to} \infty.$$

Aber

$$\|u_n\|_2^2 = n^2 \lambda^2 \left(B_{\frac{1}{n}}(x_0)\right) = n^2 \frac{\pi}{n^2} = \pi$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
□

http://numhpc.math.kit.edu/1375.php