Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

Lösungsvorschlag für das

09. Übungsblatt

Aufgabe 21:
Seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

nicht-kolineare Punkte im $\mathbb{R}^2$ und

$$K = \left\{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \middle| \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1 \wedge \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \right\}$$

ihre konvexe Hülle, also das echte Dreieck, welches a_1, a_2, a_3 als Eckpunkte hat. Bezeichne $a_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} a_i$ seinen *Schwerpunkt*. Die Vektoren seiner Seiten sind gegeben durch

$$d_1 = a_3 - a_2, \quad d_2 = a_1 - a_3, \quad d_3 = a_2 - a_1.$$

Definiere die Richtungsvektoren $\nu_i = \frac{d_i}{|d_i|}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Des Weiteren sei $\Pi = \mathbb{P}_3$[1]. Schließlich sei $\Sigma = \{\sigma_0, \dots, \sigma_3, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \dots, \sigma_{32}\} \subseteq \Pi^*$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \sigma_i(p) &= p(a_i) \text{ für } i \in \{0, \dots, 3\} \\ \sigma_{ij}(p) &= \nabla p(a_i) \cdot \nu_j \text{ für } i \neq j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

für alle $p \in \Pi$. Betrachten Sie das finite Element (K, Π, Σ).

(a) Zeigen Sie die Unisolvenz von Σ.

(b) Für den Fall eines gleichseitigen Dreiecks K, konstruieren Sie die *nodale* Basis $B = \{p_\iota\}_{\iota \in I}$ von Π: d.h. für eine Indizierung I von Σ und B soll

$$\sigma_\iota(p_\kappa) = \delta_{\iota\kappa}$$

für alle $\iota, \kappa \in I$ gelten.

[1] Menge der Polynomfunktionen in zwei Veränderlichen vom Grad höchstens drei.

Hinweis: Rechnen Sie in normierten baryzentrischen Koordinaten. Benutzen Sie Skizzen.

Lösung:
Die durch

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i a_i \\ \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{=:M} \cdot \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ definierte lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist wegen $|M| \neq 0$ bijektiv. Für einen Punkt $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ gibt es also genau ein Zahlentripel $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T \in \mathbb{R}^3$ mit $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i = 1$ und $(x, y)^T = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i a_i$. Die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ werden normierte baryzentrische Koordinaten von $(x, y)^T$ genannt.

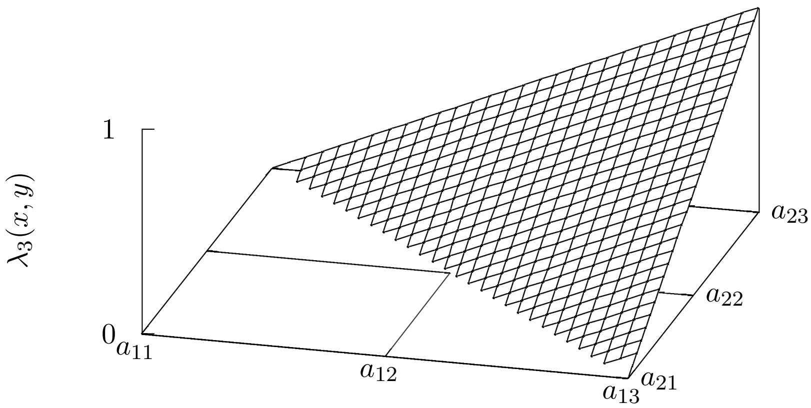


Abbildung 1: Koordinatenfunktion

Seien $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Da T^{-1} linear ist, handelt es sich bei $\lambda_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um eine affine Funktion. Eine solche ist in der Abbildung (1) dargestellt. Wir wollen $\frac{\partial \lambda_i}{\partial \nu_j}$ bestimmen. Da Gradient affiner Funktionen konstant, können wir Folgendes aus der Abbildung ablesen:

- $\frac{\partial \lambda_i}{\partial \nu_j} = 0$ für $i = j$, da $\lambda_i \equiv 0$ auf der Kante parallel zu d_i
- $\left|\frac{\partial \lambda_i}{\partial \nu_j}\right| = \frac{1}{|d_j|}$ für $i \neq j$, da λ_i auf der Kante parallel zu d_j affin ist, $\lambda_i(a_i) = 1$, $\lambda_i(a_k) = 0$ für das verbleibende $k \notin \{i, j\}$ und $|a_i - a_k| = |d_j|$.

Um das Vorzeichen der partiellen Ableitung $\frac{\partial\lambda_i}{\partial\nu_j}$ zu notieren, benötigen wir das *Levi-Civita-Symbol* ε_{ijk}. Es ist wie folgt definiert:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & \text{für } (i,j,k) \in \{(3,2,1),(2,1,3),(1,3,2)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zusammenfassend erhalten wir die folgende Formel:

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial\nu_j} = \frac{1}{|d_j|}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}$$

Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so wird die durch

$$\tilde{f}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = f\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i a_i\right)$$

für alle $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ definierte Funktion, f in baryzentrischen Koordinaten genannt. Der Kürze wegen schreibt man f statt $\tilde{f}$ und unterscheidet die beiden Funktionen nur anhand der eingesetzten Parameter (λ_i statt x,y). Es gilt für alle $x,y \in \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \tilde{f} \circ T^{-1}(x,y,1) \tag{1}$$

Ferner ist f genau dann ein Polynom, wenn $\tilde{f}$ ein Polynom ist. Es gilt dabei $\deg\tilde{f} \leq \deg f$.

Wir kommen nun zur Lösung der Aufgabe:

(a) Sei $I = \{0,1,2,3,(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$. Zu zeigen ist, dass die Abbildung $\mathbb{P}_3 \ni p \mapsto (\sigma_\iota(p))_{\iota\in I} \in \mathbb{R}^I$ ein Isomorphismus ist.

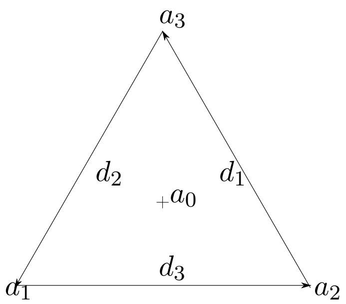
Die Linearität ist direkt einsichtig. Wegen $\dim\mathbb{P}_3 = 10 = |I|$ und der Linearität, ist die Abbildung genau dann bijektiv, wenn sie injektiv ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn ihr Kern trivial ist. Sei also $p \in \mathbb{P}_3$ mit $\sigma_\iota(p) = 0$ für alle $\iota \in I$. Wir haben zu zeigen: $p = 0$

Wir schreiben p in der Darstellung (1)

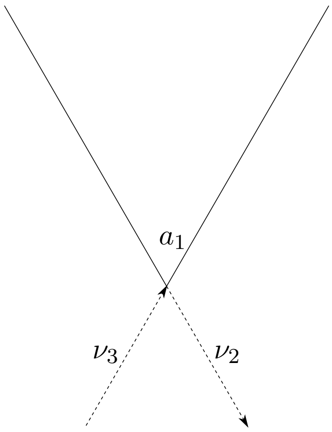
$$p(x,y) = p(\lambda_1(x,y),\lambda_2(x,y),\lambda_3(x,y)) \qquad (x,y \in \mathbb{R})$$

und eliminieren $\lambda_2 = 1 - \lambda_1 - \lambda_3$ durch die Bedingung $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i = 1$ und betrachten $p = p(\lambda_1,\lambda_3)$. Mit der Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial\nu_3}(x,y) &= \frac{\partial p}{\partial\lambda_1}\underbrace{\frac{\partial\lambda_1}{\partial\nu_3}}_{\equiv -\frac{1}{|d_3|}}(x,y) + \frac{\partial p}{\partial\lambda_3}\underbrace{\frac{\partial\lambda_3}{\partial\nu_3}}_{\equiv 0}(x,y) \\ &= -\frac{1}{|d_3|}\frac{\partial p}{\lambda_1}(x,y) \end{aligned}$$



(a) gesamtes Dreieck



(b) eine Ecke

Abbildung 2: Bezeichnungen

Die Kante $\overline{a_1a_2}$ ist gerade die Nullstellenmenge von λ_3 (siehe Abbildung (2 a)). Bei $p(\cdot, \lambda_3 = 0)$ handelt es sich um ein Polynom in einer Veränderlichen vom Grad höchstens 3. Wegen

$$\begin{aligned}
p(\lambda_1 = 1, \lambda_3 = 0) &= p(a_1) = \sigma_1(p) = 0 \\
p(\lambda_1 = 0, \lambda_3 = 0) &= p(a_2) = \sigma_2(p) = 0 \\
\frac{\partial p}{\lambda_1}(\lambda_1 = 1, \lambda_3 = 0) &= -|d_3| \frac{\partial p}{\nu_3}(a_1) = -|d_3| \sigma_{13}(p) = 0 \\
\frac{\partial p}{\lambda_1}(\lambda_1 = 0, \lambda_3 = 0) &= -|d_3| \frac{\partial p}{\nu_3}(a_2) = -|d_3| \sigma_{23}(p) = 0
\end{aligned}$$

ist es das Nullpolynom. Nach einem Lemma der Vorlesung existiert also ein $q \in \mathbb{P}_2$ mit

$$p(\lambda_1, \lambda_3) = \lambda_3 q(\lambda_1, \lambda_3).$$

Nun ersetzen wir λ_1 durch $1 - \lambda_2 - \lambda_3$ und erhalten durch die Produkt- und Kettenregel:

$$\frac{\partial p}{\partial \nu_2} = \underbrace{\frac{\partial \lambda_3}{\partial \nu_2}}_{=-\frac{1}{|d_2|}} q + \lambda_3 \frac{\partial q}{\partial \nu_2} = -\frac{q}{|d_2|} + \lambda_3 \left(\frac{\partial q}{\partial \lambda_2} \underbrace{\frac{\partial \lambda_2}{\partial \nu_2}}_{\equiv 0} + \frac{\partial q}{\partial \lambda_3} \frac{\partial \lambda_3}{\partial \nu_2} \right) = -\frac{q}{|d_2|} - \frac{\lambda_3}{|d_2|} \frac{\partial q}{\partial \lambda_3}$$

Die Kante $\overline{a_1a_3}$ ist gerade die Nullstellenmenge von λ_2. Bei $q(\lambda_2 = 0, \lambda_3 = \cdot)$ handelt es sich um ein Polynom in einer Veränderlichen vom Grad höchstens

2. Wegen (vergleiche mit dem Vorgehen bei p)

$$\begin{aligned}
q(\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1) &= q(a_3) = \underbrace{\lambda_3(a_3)}_{=1} q(a_3) = p(a_3) = \sigma_3(p) = 0 \\
q(\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0) &= -\left|d_2\right| \frac{\partial p}{\nu_2}(a_1) = -\left|d_2\right| \sigma_{12}(p) = 0 \\
\frac{\partial q}{\partial \lambda_3}(\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1) &= -\left|d_2\right| \frac{\partial p}{\partial \nu_2}(a_3) = -\left|d_2\right| \sigma_{32}(p) = 0
\end{aligned}$$

ist es das Nullpolynom. Nach einem Lemma der Vorlesung existiert also ein $r \in \mathbb{P}_1$ mit

$$q(\lambda_2, \lambda_3) = \lambda_2 r(\lambda_2, \lambda_3).$$

Durch Betrachtung von r auf der Kante $\overline{a_2 a_3}$ kommt man mit analogen Argumenten zu

$$r(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 C$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Es folgt schließlich ($p = C\lambda_1\lambda_2\lambda_3$):

$$\sigma_0(p) = p(a_0) = p\left(\lambda_1 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = \frac{1}{3}, \lambda_3 = \frac{1}{3}\right) = \frac{C}{27} = 0,$$

also $C = 0$ und damit die Aussage.

(b) Sei h die Kantenlänge des gleichseitigen Dreiecks. Nach den vorhergehenden Bemerkungen gilt für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\lambda_i(a_j) = \delta_{ij} \qquad \frac{\partial \lambda_i}{\partial \nu_j} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}$$

Die erste Identität legt den Kandidaten $\tilde{p}_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ für p_0 nahe. Tatsächlich gilt für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_0(a_i) &= \prod_{k=1}^{3} \lambda_i(a_k) = \prod_{k=1}^{3} \delta_{ik} = \prod_{\substack{i \neq k \\ i=1}}^{3} 0 = 0 \\
\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \nu_j}(a_i) &= \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \nu_j} \left(\prod_{k=1}^{3} \lambda_k \right)(a_i) = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial \lambda_l}{\partial \nu_j}(a_i) \prod_{\substack{k \neq l \\ k=1}}^{3} \lambda_k(a_i) \\
&= \frac{1}{h} \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial \lambda_l}{\partial \nu_j}(a_i) \prod_{\substack{k \neq l \\ k=1}}^{3} \delta_{ki} = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial \lambda_l}{\partial \nu_j}(a_i) \prod_{\substack{k \notin \{l,i\} \\ k=1}}^{3} 0 = 0 \\
\tilde{p}_0(a_0) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}
\end{aligned}$$

Also ist $p_0 = 27\tilde{p}_0 = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.
Seien $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ mit $k \neq l$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
(\lambda_k^2\lambda_l)(a_i) &= \delta_{ki}\delta_{li} = \delta_{kl}\delta ki = 0 \\
\frac{\partial \lambda_k^2\lambda_l}{\partial \nu_j}(a_i) &= \frac{\partial \lambda_l}{\partial \nu_j}(a_i)\lambda_k^2(a_i) - 2\underbrace{\lambda_k(a_i)\lambda_l(a_i)}_{\delta_{kl}\delta_{ki}=0}\frac{\partial \lambda_k}{\partial \nu_j}(a_i) = \delta_{ik}\frac{1}{h}\sum_{m=1}^{3}\varepsilon_{ljm} \\
(\lambda_k^2\lambda_l)(a_0) &= \frac{1}{27}
\end{aligned}$$

Damit lassen sich p_{kl} konstruieren:

$$\begin{aligned}
p_{12} &= -h\left(\lambda_1^2\lambda_3 - \frac{1}{27}p_0\right) = h\lambda_1\lambda_3(\lambda_2 - \lambda_1) \\
p_{13} &= h\left(\lambda_1^2\lambda_2 - \frac{1}{27}p_0\right) = h\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_3) \\
p_{21} &= h\left(\lambda_2^2\lambda_3 - \frac{1}{27}p_0\right) = h\lambda_2\lambda_3(\lambda_2 - \lambda_1) \\
p_{23} &= -h\left(\lambda_2^2\lambda_1 - \frac{1}{27}p_0\right) = h\lambda_1\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_2) \\
p_{31} &= -h\left(\lambda_3^2\lambda_2 - \frac{1}{27}p_0\right) = h\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3) \\
p_{32} &= h\left(\lambda_3^2\lambda_1 - \frac{1}{27}p_0\right) = h\lambda_1\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2)
\end{aligned}$$

Mit p_{kl} lassen sich die Ableitungen von λ_i „korrigieren“ und man erhält p_i:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \lambda_1 - \frac{1}{3}p_0 - \frac{1}{h}(p_{12} + p_{32}) + \frac{1}{h}(p_{13} + p_{23}) \\
&= \lambda_1(1 - 9\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3) + \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)) \\
p_2 &= \lambda_2 - \frac{1}{3}p_0 + \frac{1}{h}(p_{21} + p_{31}) - \frac{1}{h}(p_{13} + p_{23}) \\
&= \lambda_2(1 - 9\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3(\lambda_2 - \lambda_3) + \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)) \\
p_3 &= \lambda_3 - \frac{1}{3}p_0 - \frac{1}{h}(p_{21} + p_{31}) + \frac{1}{h}(p_{12} + p_{32}) \\
&= \lambda_3(1 - 9\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2(\lambda_3 - \lambda_2) + \lambda_1(\lambda_3 - \lambda_1))
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 22:
Sei $\Omega = [-\pi, \pi]^2$, $u \in L^2(\Omega)$. Die *Fourier-Koeffizienten* $(\hat{u}_{kl})_{k,l\in\mathbb{Z}}$ von u sind durch

$$\hat{u}_{kl} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x,y)e^{-\mathrm{i}(kx+ly)}\mathrm{dxdy}$$

für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ definiert.

(a) Zeigen Sie:
Gilt $(k\hat{u}_{kl})_{k,l\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}^2)$, so existiert die schwache partielle Ableitung $\partial_x u$. Ihre Fourier-Koeffizienten sind durch $(\mathrm{i}k\hat{u}_{kl})_{k,l\in\mathbb{Z}}$ gegeben.

Hinweis: Sie können ohne Beweis die folgenden Aussagen verwenden:

- $\langle v, w\rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega v\overline{w}\mathrm{dx} = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \hat{v}_{kl}\overline{\hat{w}_{kl}} =: \langle \hat{v}, \hat{w}\rangle_{l^2(\mathbb{Z}^2)} \qquad \forall v, w \in L^2(\Omega)$
- $\widehat{\partial_x\varphi}_{k,l} = ik\hat{\varphi}_{k,l} \qquad \forall k, l \in \mathbb{Z} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

Bemerkung: Für die schwache partielle Ableitung $\partial_y u$ gilt Entsprechendes.

(b) Zeigen Sie:
Ist $u \in H_0^1(\Omega)$, so gilt für die schwache partielle Ableitung $\partial_x u \in L^2(\Omega)$:

$$\widehat{\partial_x u}_{kl} = \mathrm{i}k\hat{u}_{kl} \qquad \forall k, l \in \mathbb{Z}$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis die folgende Aussage verwenden:

$$\int_\Omega u\partial_x\varphi\mathrm{dx} = -\int_\Omega \varphi\partial_x u\mathrm{dx} \qquad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega)$$

Bemerkung: Für die schwache partielle Ableitung $\partial_y u$ gilt Entsprechendes.

Lösung:

(a) Betrachte als Kandidaten für $\frac{\partial u}{\partial x}$ die durch

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^2} ik\hat{u}_{kl} \exp\left(\mathrm{i}(kx + ly)\right)$$

für alle $(x, y) \in \Omega$ definierte L^2-Funktion. Die Reihe konvergiert in $L^2(\Omega)$, wegen der Isometrieeigenschaft aus dem Hinweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\varphi(x,y)\mathrm{d}(x,y) &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \overline{\varphi} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} ik\hat{u}_{kl}\overline{\hat{\overline{\varphi}}_{kl}} \\
&= -\sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \hat{u}_{kl}\overline{ik\hat{\overline{\varphi}}_{kl}} \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} -\sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \hat{u}_{kl}\overline{\left(\widehat{\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}}\right)_{kl}} \\
&\overset{Hinweis}{=} \left\langle u, \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega u(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}(x,y),
\end{aligned}$$

was beweist, dass $\frac{\partial u}{\partial x}$ tatsächlich die schwache partielle Ableitung von u ist.

(b) Seien $k_0, l_0 \in \mathbb{Z}$. Betrachte $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, welches durch

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp(\mathrm{i}(k_0x + l_0y)) \qquad ((x,y)\in\Omega)$$

definiert ist. Es gilt für alle $k, l \in \mathbb{Z}$:

$$\widehat{\varphi}_{k,l} = \delta_{kk_0}\delta_{ll_0}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}k_0\hat{u}_{k_0l_0} &= -\sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \hat{u}_{kl}\overline{\mathrm{i}k\hat{\varphi}_{kl}} \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} -\sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \hat{u}_{kl}\overline{\left(\widehat{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}\right)_{kl}} \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} -\int_\Omega u(x,y)\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}(x,y) \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} \int_\Omega \overline{\varphi(x,y)}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \left(\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}\right)_{kl}\overline{\hat{\varphi}_{kl}} \\
&= \widehat{\partial_x u}_{k_0l_0}
\end{aligned}$$

Weil $k_0, l_0 \in \mathbb{Z}$ beliebig waren, ist die Aussage bewiesen.

http://numhpc.math.kit.edu/1375.php