Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

Lösungsvorschlag für das

10. Übungsblatt

Aufgabe 23:
Sei $\Omega = (0,1)^2$, $N \in \mathbb{N}$ und $h = \frac{1}{N}$. Die Stützstellen $(x_i, y_j) \in \overline{\Omega}$ seien durch $x_i = ih$, $y_j = jh$ für $i, j \in \{0, \ldots, N\}$ definiert. Ferner seien die Zellen I_{ij} durch $I_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, für $i, j \in \{0, \ldots, N-1\}$, gegeben. Betrachten Sie den Ansatzraum

$$V_h = \left\{ f \in C(\overline{\Omega}) \middle| f|_{\partial\Omega} \equiv 0, \forall i, j \in \{0, \ldots, N-1\} : f|_{I_{ij}} \text{ ist bilinear} \right\} \subseteq H_0^1(\Omega)$$

und die durch

$$\Psi^1(x,y) = (1-x)(1-y),\ \Psi^2(x,y) = x(1-y),\ \Psi^3(x,y) = xy,\ \Psi^4(x,y) = (1-x)y$$

für alle $x, y \in \overline{\Omega}$ definierten Funktionen.

(a) Finden Sie für jedes $i, j \in \{0, \ldots, N-1\}$ eine affine Transformation $T_{ij} : \overline{\Omega} \to I_{ij}$, so dass

$$\left(\Psi_{ij}^k\right)_{k\in\{1,\ldots,4\}} := \left(\Psi^k \circ T_{ij}^{-1}\right)_{k\in\{1,\ldots,4\}}$$

eine Basis der bilinearen Funktionen auf I_{ij} ist.

(b) Berechnen Sie die zu $-\Delta$ gehörenden *lokalen Steifigkeitsmatrizen*

$$M_{ij} = \left(\int_{I_{ij}} \nabla\Psi_{ij}^k \cdot \nabla\Psi_{ij}^l \right)_{k,l\in\{1,\ldots,4\}}$$

für $i, j \in \{0, \ldots, N-1\}$.
Hinweis: Benutzen Sie die Teilaufgabe (a) und den Transformationssatz.

(c) Berechnen Sie eine Näherung für M_{ij}, indem Sie anstatt exakt zu integrieren, die folgende 2-dimensionale „Tensorprodukt-Trapezregel“ verwenden:

$$Q_T(f) = \frac{|T|}{4} \sum_{k=1}^{4} f(x_k) \qquad x_k \text{ Eckpunkte der Zelle } T \tag{1}$$

(d) Die Hutfunktionen Ψ_{ij} sind durch

$$\Psi_{ij}(x,y) = \begin{cases} \Psi^1_{ij}(x,y) & \text{für } (x,y) \in I_{ij} \\ \Psi^2_{i-1,j}(x,y) & \text{für } (x,y) \in I_{i-1,j} \\ \Psi^3_{i-1,j-1}(x,y) & \text{für } (x,y) \in I_{i-1,j-1} \\ \Psi^4_{i,j-1}(x,y) & \text{für } (x,y) \in I_{i,j-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $(x,y) \in \overline{\Omega}$ und alle $i,j \in \{1,\ldots N-1\}$ definiert. Sie bilden eine Basis des V_h. Berechnen Sie, ausgehend von den lokalen Steifigkeitsmatrizen aus Teilaufgabe (b), die globale Steifigkeitsmatrix:

$$M = \left(\int_\Omega \nabla\Psi_{ij} \cdot \nabla\Psi_{kl} \right)_{i,j,k,l \in \{1,\ldots N-1\}}$$

Hinweis: Fertigen Sie sich eine Skizze an.

(e) Benutzen Sie die genährten lokalen Steifigkeitsmatrizen aus Teilaufgabe (c), um eine Näherung der globalen Steifigkeitsmatrix zu berechnen. Welchen Vorteil hat die Näherung gebracht?

Lösung:

(a) Seien $i,j \in \{0,\ldots,N-1\}$. Die Transformation $T_{ij} = h \cdot \mathrm{id} + (x_i, y_j)^T$ leistet das Gewünschte.

(b) Wir berechnen zunächst

$$\nabla\Psi_1(x,y) = \begin{pmatrix} y-1 \\ x-1 \end{pmatrix} \qquad \nabla\Psi_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\nabla\Psi_3(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad \nabla\Psi_4(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ 1-x \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \overline{\Omega}$. Daraus berechnen wir $a_{kl} = \int_\Omega \nabla\Psi^k \cdot \nabla\Psi^l$ für alle $k,l \in \{1,2,3,4\}$. Da alle Ψ^k ($k \in \{2,3,4\}$) aus Ψ^1 durch Verkettung mit einer Affindrehung hervorgehen, ergeben sich folgende Symmetriebeziehungen:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44}, \quad a_{12} = a_{23} = a_{34} = a_{41}, \quad a_{13} = a_{24}$$

Wegen $a_{kl} = a_{lk}$ für alle $k,l \in \{1,2,3,4\}$ sind nur noch drei Integrale zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
a_{33} &= \int_0^1 \int_0^1 y^2 + x^2 \mathrm{dxdy} = 2\int_0^1 x^2 \mathrm{dx} = \frac{2}{3} \\
a_{34} &= \int_0^1 \int_0^1 -y^2 + x - x^2 \mathrm{dxdy} = -a_{33} + \int_0^1 \int_0^1 x \mathrm{dxdy} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \\
a_{13} &= \int_0^1 \int_0^1 y^2 - y + x^2 - x \mathrm{dxdy} = a_{33} - 2\int_0^1 x \mathrm{dy} = a_{33} - 2\int_0^1 x \mathrm{dx} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Mit dieser Vorbereitung berechnen wir mit Hilfe der Kettenregel, des Transformationssatzes und der Teilaufgabe (a):

$$
\begin{aligned}
(M_{ij})_{kl} &= \int_{I_{ij}} \nabla\Psi_{ij}^k \cdot \nabla\Psi_{ij}^l \\
&\overset{\text{(a)}}{=} \int_{\mathbb{T}_{ij}(\Omega)} \left(\nabla\Psi^k \circ T_{ij}^{-1}\right) \cdot \left(\nabla\Psi^l \circ T_{ij}^{-1}\right) \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{\mathbb{T}_{ij}(\Omega)} \left(\nabla\Psi^k\right)(T_{ij}^{-1}) \cdot \underbrace{\nabla T_{ij}^{-1}}_{=\frac{1}{h}\,\mathrm{id}} \cdot \left(\nabla\Psi^l\right)(T_{ij}^{-1}) \cdot \underbrace{\nabla T_{ij}^{-1}}_{=\frac{1}{h}\,\mathrm{id}} \\
&= \frac{1}{h^2} \int_{\mathbb{T}_{ij}(\Omega)} \left(\nabla\Psi^k \cdot \nabla\Psi^l\right)(T_{ij}^{-1}) \\
&\overset{\text{Transformationssatz}}{=} \frac{1}{h^2} \int_{\Omega} \left(\nabla\Psi^k \cdot \nabla\Psi^l\right) \underbrace{|\det \nabla T_{ij}|}_{=h^2} \\
&= a_{ij}
\end{aligned}
$$

(c) Seien $i, j \in \{0, \ldots, N-1\}$. Die Eckpunkte der Zelle I_{ij} sind gerade:

$$
x_{ij}^1 = (x_i, y_j) \qquad x_{ij}^2 = (x_{i+1}, y_j) \qquad x_{ij}^3 = (x_{i+1}, y_{j+1}) \qquad x_{ij}^4 = (x_i, y_{j+1})
$$

Für sie gilt:

$$
\begin{aligned}
x^1 &:= (0,0) = T_{ij}^{-1}(x_{ij}^1) \qquad & x^2 &:= (1,0) = T_{ij}^{-1}(x_{ij}^2) \\
x^3 &:= (1,1) = T_{ij}^{-1}(x_{ij}^3) \qquad & x^4 &:= (1,0) = T_{ij}^{-1}(x_{ij}^4)
\end{aligned}
$$

Die Fläche der Zelle I_{ij} beträgt h^2. Für die genäherte lokale Steifigkeitsmatrix

$\tilde{M}_{ij}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{M}_{ij}\right)_{kl} &= \frac{|I_{ij}|}{4}\sum_{m=1}^{4}\left(\nabla\Psi_{ij}^{k}\cdot\nabla\Psi_{ij}^{l}\right)(x_{ij}^{m})\\
&= \frac{h^2}{4}\sum_{m=1}^{4}\left(\nabla\Psi^{k}\circ T_{ij}^{-1}\right)\cdot\left(\nabla\Psi^{l}\circ T_{ij}^{-1}\right)(x_{ij}^{m})\\
&= \frac{h^2}{4}\sum_{m=1}^{4}(\nabla\Psi^{k})(\underbrace{T_{ij}^{-1}(x_{ij}^{m})}_{=x^m})\underbrace{\nabla T_{ij}^{-1}}_{\frac{1}{h}id}\cdot(\nabla\Psi^{l})(\underbrace{T_{ij}^{-1}(x_{ij}^{m})}_{=x^m})(\underbrace{\nabla T_{ij}^{-1}}_{\frac{1}{h}id})\\
&= \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{4}(\nabla\Psi^{k})(x^{m})\cdot(\nabla\Psi^{l})(x^{m})\\
&=: \tilde{a}_{kl}
\end{aligned}$$

Für die genährte lokale Steifigkeitsmatrix gelten die gleichen Symmetrien, wie für die exakt berechnete:

$$\tilde{a}_{11}=\tilde{a}_{22}=\tilde{a}_{33}=\tilde{a}_{44},\quad \tilde{a}_{12}=\tilde{a}_{23}=\tilde{a}_{34}=\tilde{a}_{41},\quad \tilde{a}_{13}=\tilde{a}_{24}$$

Wegen $\tilde{a}_{kl}=\tilde{a}_{lk}$ für alle $k,l\in\{1,2,3,4\}$ sind nur noch drei Werte (durch Einsetzen) zu berechnen:

$$\tilde{a}_{33}=1 \qquad \tilde{a}_{34}=-\frac{1}{2} \qquad \tilde{a}_{13}=0$$

(d) Die in der Aufgabenstellung definierte Hutfunktion ist in der Abbildung 1 dargestellt. Ferner erkennt man an der Abbildung 2, dass

$$M_{(i,j)(k,l)}=0 \qquad \text{falls } \max\{|i-k|,|j-l|\}>1.$$

Die Matrix M ist also dünn besetzt. Ferner (siehe wieder Abbildung 2) erkennt man folgende Symmetrien: Für alle $i,j,k,l\in\{1,\dots N-1\}$ gilt:

- $M_{(i,j)(k,l)}=M_{(k,l)(i,j)}$
- $M_{(i,j)(i,j)}=M_{(1,1)(1,1)}$
- $M_{(i-1,j)(i,j)}=M_{(i+1,j)(i,j)}=M_{(i,j-1)(i,j)}=M_{(i,j+1)(i-1,j)}=M_{(1,1)(2,1)}$ (wenn die Indizes gültig sind)
- $M_{(i+1,j+1)(i,j)}=M_{(i-1,j+1)(i,j)}=M_{(i-1,j-1)(i,j)}=M_{(i+1,j-1)(i,j)}=M_{(1,1)(2,2)}$ (wenn die Indizes gültig sind)

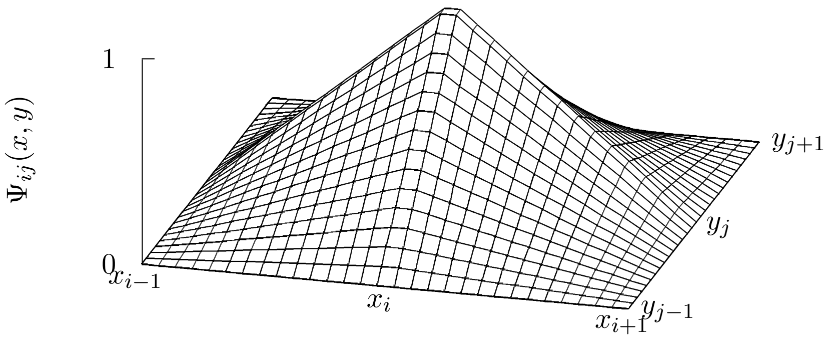

Abbildung 1: Hutfunktion

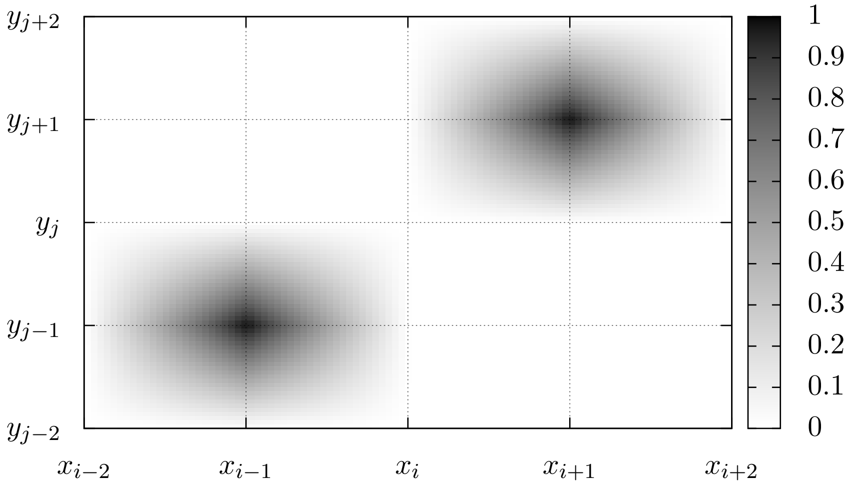

Abbildung 2: Zwei Hutfunktionen

Es reicht also die Einträge $M_{(1,1)(1,1)}, M_{(1,1)(2,1)}$ und $M_{(1,1)(2,2)}$ zu berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} M_{(1,1)(1,1)} &= \sum_{m=1}^{4} a_{ii} = 4a_{11} = \frac{8}{3} \\ M_{(1,1)(2,1)} &= a_{12} + a_{43} = 2a_{12} = -\frac{1}{3} \\ M_{(1,1)(2,2)} &= a_{13} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

(e) Für die genährte globale Steifigkeitsmatrix $\tilde{M}$ gelten die gleichen Symmetrien, wie für die exakt berechnete. Folgende Einträge beschreiben deshalb die Matrix vollständig:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{(1,1)(1,1)} &= \sum_{m=1}^{4} \tilde{a}_{ii} = 4\tilde{a}_{11} = 4 \\ \tilde{M}_{(1,1)(2,1)} &= \tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{43} = 2\tilde{a}_{12} = -1 \\ \tilde{M}_{(1,1)(2,2)} &= \tilde{a}_{13} = 0 \end{aligned}$$

Der Vorteil der Näherung ist also, dass $\tilde{M}$ dünner als M besetzt ist.

□

Aufgabe 24:
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Ferner sei $\lambda_{\min}$ bzw. $\lambda_{\max}$ ihr kleinster bzw. größter Eigenwert. Zeigen Sie:

$$\lambda_{\min} = \min_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{x^T M x}{x^T x} \qquad \lambda_{\max} = \max_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{x^T M x}{x^T x}$$

Lösung: Da M symmetrisch und reell ist, wissen wir aus linearer Algebra, dass M orthogonal diagonalisierbar ist. Das heißt, es gibt eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und eine Diagonalmatrix $M = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, so dass

$$M = UDU^T.$$

O.B.d.A. gelte $\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_d = \lambda_{\max}$. Für den *Rayleigh-Quotienten* R gilt für alle $y = Ux \in \mathbb{R}^d$

$$R(x) = \frac{x^T M x}{x^T x} = \frac{x^T U^T D U x}{x^T U^T U x} = \frac{y^T D y}{y^T y} = \frac{\sum_{i=1}^d y_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^d y_i^2}.$$

Da die Abbildung $x \mapsto Ux = y$ ein Isomorphismus ist, gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} R(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{\sum_{i=1}^d y_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^d y_i^2}, \qquad \inf_{x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} R(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{\sum_{i=1}^d y_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^d y_i^2}.$$

Ferner gilt

$$\lambda_{\min} = \inf_{y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{\sum_{i=1}^d y_i^2 \lambda_1}{\sum_{i=1}^d y_i^2} \leq \inf_{y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{\sum_{i=1}^d y_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^d y_i^2}$$

sowie

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{\sum_{i=1}^d y_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^d y_i^2} \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{\sum_{i=1}^d y_i^2 \lambda_d}{\sum_{i=1}^d y_i^2} = \lambda_{\max}.$$

Die Spezielle Wahl $y = e_1$ bzw. $y = e_d$ liefert

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{\sum_{i=1}^d y_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^d y_i^2} \leq \lambda_{\min}, \qquad \sup_{y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{\sum_{i=1}^d y_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^d y_i^2} \geq \lambda_{\max}.$$

Damit gilt die Behauptung

$$\lambda_{\min} = \min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{x^T M x}{x^T x} \qquad \lambda_{\max} = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{x^T M x}{x^T x}.$$

$\square$