Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

Lösungsvorschlag für das

12. Übungsblatt

Aufgabe 28:
Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, $b, x_0 \in \mathbb{R}^d$. Definiere $r_0 = b - Ax_0$. Betrachten Sie für $m \in \{1, \dots, d\}$ den *Krylow-Raum*

$$K_m = \operatorname{span}\left\{r_0, Ar_0, \dots, A^{m-1}r_0\right\}.$$

Sei $y \in K_m$ und $x = x_0 + y$. Zeigen Sie:

(a) $r := b - Ax \in K_{m+1}$

(b) Ist $r \perp K_m$ und $A^m r_0 \in K_m$, so ist $r = 0$.

Lösung:

(a) Nach Voraussetzung existieren Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}$ derart, dass

$$x = x_0 + \sum_{n=0}^{m-1} \alpha_n A^n r_0 \tag{1}$$

gilt. Daher folgt:

$$\begin{aligned} r &= b - Ax \\ &= b - Ax_0 + Ax_0 - Ax \\ &= r_0 + A(x_0 - x) \\ &\overset{(1)}{=} r_0 + A\left(\sum_{n=0}^{m-1} A^n r_0\right) \\ &= r_0 + \sum_{n=1}^{m} A^n r_0 \in K_{m+1} \end{aligned}$$

(b) Wegen $A^m r_0 \in K_m$ folgt $K_m = K_{m+1}$. Nach (a) ist also $r \in K_{m+1} = K_m$. Wegen $r \perp K_m$ ist insbesondere $\langle r, r\rangle = \|r\|^2 = 0$, also $r = 0$.

□

Aufgabe 29:
Betrachten Sie das folgende Anfangs-Randwert-Problem

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 && \text{in } (0,\infty)\times(0,\infty) \\ u(0,t) &= h(t) && \text{für } t\in(0,\infty) \\ u(x,0) &= 0 && \text{für } x\in(0,\infty) \end{aligned}$$

mit einer differenzierbaren Funktion $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, deren Ableitung höchstens exponentielles Wachstum besitzt.

(a) Zeigen Sie, dass die durch

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{x}{\sqrt{2t}}}^{\infty}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)h\left(t-\frac{x^2}{2s^2}\right)\mathrm{ds} \tag{2}$$

definierte Funktion $u:[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ das Problem löst.

(b) Ist u_t in $(0,\infty)\times(0,\infty)$ beschränkt? Falls nein, welche zusätzliche Bedingungen an h garantieren die Beschränktheit von u_t?

Lösung:
Wir zeigen zunächst, dass das Integral in (2) existiert: Seien dazu $x,t\in(0,\infty)$ beliebig aber zunächst fest. Nach Voraussetzung, ist h' auf jedem beschränkten Intervall $(0,S)$ mit $S>0$ beschränkt. Insbesondere ist h Lipschitz-stetig auf $(0,S)$. Damit besitzt h eine eindeutige stetige Fortsetzung auf $[0,\infty)$ (vergleiche zur Konstruktion etwa Aufgabe 18 (b)). Der Kürze wegen, bezeichnen wir diese stetige Fortsetzung ebenfalls mit h. Die stetige Funktion h ist auf dem Kompaktum $[0,S]$ beschränkt, etwa $|h(s)|\le C_1=C_1(S)$ für $s\in[0,S]$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\frac{x}{\sqrt{2t}}}^{\infty}\left|\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)h\left(t-\frac{x^2}{2s^2}\right)\right|\mathrm{ds} &\le \max_{s\in[0,t]}|h(s)|\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\mathrm{ds} \\ &\le C_1(t)\sqrt{\frac{\pi}{2}}<\infty, \end{aligned}$$

was die Existenz des Integrals in (2) sicherstellt.

(a) Wir weisen nach, dass u der Anfangswertvorgabe genügt: Sei $(x_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ mit $(x_n,t_n)\to(x_0,0)$ als $n\to\infty$ für ein $x_0>0$. Dann ist $\frac{x_n}{2t_n}\to\infty$ für $n\to\infty$. Als konvergente Folge ist $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, etwa $0<t_n\le T$ für

alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|u(x_n,t_n)| &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x_n}{\sqrt{2t_n}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \left| h\left(t_n - \frac{x_n^2}{2s^2}\right)\right| \mathrm{ds} \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} C_1(t_n) \int_{\frac{x_n}{\sqrt{2t_n}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \mathrm{ds} \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} C_1(T) \int_{\frac{x_n}{\sqrt{2t_n}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \mathrm{ds} \\
&\overset{\text{mon. Konv.}}{\to} 0
\end{aligned}$$

Jetzt weisen wir nach, dass u der Randwertvorgabe genügt: Sei dazu $(x_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ mit $(x_n,t_n) \to (0,t_0)$ als $n \to \infty$ für ein $t_0 > 0$. Dann ist $\frac{x_n}{\sqrt{2t_n}} \to 0$ für $n \to \infty$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|u(x_n,t_n) - h(t_0)| &= \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x_n}{\sqrt{2t_n}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) h\left(t_n - \frac{x_n^2}{2s^2}\right) \mathrm{ds} - h(t_0) \right| \\
&= \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x_n}{\sqrt{2t_n}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) h\left(t_n - \frac{x_n^2}{2s^2}\right) \mathrm{ds} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) h(t_0) \mathrm{ds} \right| \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x_n}{\sqrt{2t_n}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \left| h\left(t_n - \frac{x_n^2}{2s^2}\right) - h(t_0)\right| \mathrm{ds} \\
&\quad + |h(t_0)| \int_0^{\frac{x_n}{\sqrt{2t_n}}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \mathrm{ds} \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \underbrace{\int_{\frac{x_n}{\sqrt{2t_n}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \left| h\left(t_n - \frac{x_n^2}{2s^2}\right) - h(t_0)\right| \mathrm{ds}}_{\to 0 \text{ (majorisierte Konvergenz)}} \\
&\quad + |h(t_0)| \underbrace{\int_0^{\frac{x_n}{\sqrt{2t_n}}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \mathrm{ds}}_{\to 0 \text{ (monotone Konvergenz)}} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

Schließlich zeigen wir, dass u der Differentialgleichung genügt: Da wir Wenig über die analytischen Eigenschaften von h wissen, überführen wir zuerst das Integral in (2) in eine Form, in der die x- und t-Abhängigkeit sich möglichst auf die Exponentialfunktion beziehen (Substitution). Betrachte dazu die Abbildung $T : (0,t) \to (\frac{x}{2t}, \infty)$ definiert durch

$$T(y) = \frac{x}{\sqrt{2(t-y)}} \qquad (y \in (0,t)).$$

Sie ist invertierbar, wobei die Inverse durch

$$T^{-1}(s) = t - \frac{x^2}{2s^2} \qquad \left(s \in \left(\frac{x}{2t}, \infty\right)\right)$$

gegeben ist. Wegen

$$T'(y) = \frac{x}{(2(t-y))^{\frac{3}{2}}} > 0 \qquad (y \in (0,t)),$$

ist T ein Diffeomorphismus. Nach der Substitutionsregel gilt:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2t}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) h\left(t - \frac{x^2}{2s^2}\right) \mathrm{ds} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{T(0,t)} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-T^{-1}(s))}\right) h(T^{-1}(s)) \mathrm{ds} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-y)}\right) h(y) \left|T'(y)\right| \mathrm{dy} \\
&= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-y)}\right) \frac{h(y)}{(t-y)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{dy}
\end{aligned}$$

Definiere dazu die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ durch

$$f(x,\tau,y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-y)}\right) \frac{x}{(\tau-y)^{\frac{3}{2}}} & \text{falls } y < \tau \\ 0 & \text{falls } y \geq \tau \end{cases}.$$

Es ist evident, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \{(\tau,y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq \tau\})$. Wie in Analysis I zeigt man (vergleiche dort den Beweis zu $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) \in C^\infty(\mathbb{R})$), dass sogar $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Kettenregel und Differentiation von Parameterintegralen liefern nun alle benötigten partiellen Ableitungen:

(i)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t f(x,t,y) h(y) \mathrm{dy} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} f(x,t,t) h(t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial \tau}(x,t,y) h(y) \mathrm{dy} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-y)}\right) \left(\frac{x^3}{4(t-y)^{\frac{7}{2}}} - \frac{3x}{2(t-y)^{\frac{5}{2}}}\right) h(y) \mathrm{dy}
\end{aligned}$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x,t,y)h(y)\mathrm{dy} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-y)}\right)\left(\frac{1}{(t-y)^{\frac{3}{2}}}-\frac{x^2}{2(t-y)^{\frac{5}{2}}}\right)h(y)\mathrm{dy}
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial x}(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}(x,t,y)h(y)\mathrm{dy} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-y)}\right)\left(\frac{x^3}{4(t-y)^{\frac{7}{2}}}-\frac{x}{2(t-y)^{\frac{5}{2}}}-\frac{x}{(t-y)^{\frac{5}{2}}}\right)h(y)\mathrm{dy} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-y)}\right)\left(\frac{x^3}{4(t-y)^{\frac{7}{2}}}-\frac{3x}{2(t-y)^{\frac{5}{2}}}\right)h(y)\mathrm{dy}
\end{aligned}
$$

(b) Wir formen den Ausdruck für $\frac{\partial u}{\partial t}$ mit Hilfe der partiellen Integration um zu:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial \tau}(x,t,y)h(y)\mathrm{dy} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(x,t,y)h(y)\mathrm{dy} \\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}\left[f(x,t,y)h(y)\right]_{y=0}^{y=t} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t f(x,t,y)\frac{\partial h}{\partial y}(y)\mathrm{dy} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\frac{x}{t^{\frac{3}{2}}}h(0) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-y)}\right)\frac{xh'(y)}{(t-y)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{dy} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\frac{x}{t^{\frac{3}{2}}}h(0) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t \exp\left(-\frac{T^2(y)}{2}\right)T'(y)h'(y)\mathrm{dy} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\frac{x}{t^{\frac{3}{2}}}h(0) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{x}{\sqrt{2t}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)h'\left(t-\frac{x^2}{2s}\right)\mathrm{ds}
\end{aligned}
$$

Betrachte den Fall $h(0) > 0$, $h' \geq 0$. Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$ mit $t_n \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt:

$$
\left|u(\sqrt{t_n}, t_n)\right| \geq \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{h(0)}{t_n} \overset{n\to\infty}{\to} \infty
$$

Also ist die *Kompatibilitätsbedingung* $h(0) = 0$ notwendig, damit u_t beschränkt bleibt.

Betrachte, unter der obigen Kompatibilitätsbedingung, den Fall $h'(y) = M\exp(\gamma y)$ für feste $M > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ und alle $y > 0$. Sei $x > 0$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$ mit $t_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Es gilt

$$\begin{aligned}
|u(x,t_n)| &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{x}{\sqrt{2t_n}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) h'\left(t_n - \frac{x^2}{2s}\right) \mathrm{ds} \\
&= M\exp(\gamma t)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{x}{\sqrt{2t_n}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2} - \frac{\gamma x^2}{2s}\right) \mathrm{ds} \\
&\stackrel{n\to\infty}{\to} \infty,
\end{aligned}$$

wenn $\gamma > 0$.

Insgesamt also: u_t ist beschränkt, falls $h(0) = 0$ und $h' \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$.

$\square$

http://numhpc.math.kit.edu/1375.php