Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

Lösungsvorschlag für das

13. Übungsblatt

Aufgabe 30:
Die *Tschebyscheff*-Polynome $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind durch die folgende Drei-Term-Rekursion definiert:

$$T_0 = 1 \qquad T_1 = x \qquad T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

(a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos\left((n+1)x\right) = 2\cos(x)\cos(nx) - \cos\left((n-1)x\right) \tag{1}$$

Hinweis: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$T_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha) \tag{2}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Teilaufgabe (a).

(c) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt[1]:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right) \tag{3}$$

Lösung:

(a) Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$. Es gilt (mit dem Hinweis)

$$\begin{aligned} \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) \quad = \quad & \cos(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x) \\ & + \cos(nx)\cos(-x) - \sin(nx)\sin(-x) \\ & 2\cos(nx)\cos(x), \end{aligned}$$

woraus direkt die Behauptung folgt.

[1] Dabei sei $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$ gewählt.

(b) Wir führen einen Induktionsbeweis über $N \in \mathbb{N}_0$:

(i) Induktionsanfang ($N = 0$, $N = 1$): Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$T_0(\cos(\alpha)) = 1 = \cos(0 \cdot \alpha)$$

sowie

$$T_1(\cos(\alpha)) = \cos(\alpha) = \cos(1 \cdot \alpha).$$

(ii) Induktionsschritt: Für ein $N \in \mathbb{N}$ gelte die Formel (2) für alle $n \in \{0, \dots, N\}$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $N + 1$ in der Tat:

$$\begin{aligned} T_{N+1}(\cos(\alpha)) &\overset{\text{Def.}}{=} 2\cos(\alpha) T_N(\cos(\alpha)) - T_{N-1}(\cos(\alpha)) \\ &\overset{\text{I.H.}}{=} 2\cos(\alpha)\cos(N\alpha) - \cos((N-1)\alpha) \\ &\overset{(1)}{=} \cos((N+1)\alpha) \end{aligned}$$

(c) Auch diese Aussage zeigen wir durch Induktion über $N \in \mathbb{N}_0$:

(i) Induktionsanfang ($N = 0$, $N = 1$): offensichtlich.

(ii) Induktionsschritt: Für ein $N \in \mathbb{N}$ gelte die Formel (3) für alle $n \in \{0, \dots, N\}$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $N + 1$ in der Tat:

$$\begin{aligned} T_{N+1}(x) &\overset{\text{Def.}}{=} 2xT_N(x) - T_{N-1}(x) \\ &\overset{\text{I.H.}}{=} 2x\frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^N + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^N\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{N-1} + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^{N-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{N-1}\left(2x^2 + 2x\sqrt{x^2-1} - 1\right)\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^{N-1}\left(2x^2 - 2x\sqrt{x^2-1} - 1\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{N-1}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^2\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^{N-1}\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{N+1} + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^{N+1}\right) \end{aligned}$$

□

Aufgabe 31:
Sei $I = [a, b]$ ein nicht-leeres Intervall, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus I$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Betrachten Sie das folgende *Minimax*-Problem: Gesucht ist ein Polynom $P_n \in \mathbb{P}_n$ mit $P_n(x_0) = 1$ und

$$\max_{x \in I} |P_n(x)| = \min_{\substack{P(x_0)=1 \\ P \in \mathbb{P}_n}} \max_{x \in I} |P(x)| .$$

Sei die affine Transformation $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $t(x) = 2\frac{x-a}{b-a} - 1$. Ferner sei das *modifizierte* Tschebyscheff-Polynom $\hat{T}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\hat{T}_n(x) = \frac{(T_n \circ t)(x)}{(T_n \circ t)(x_0)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(a) Zeigen Sie: $T_n(t(x_0)) \neq 0$ und $\max_{x \in I} \left|\hat{T}_n\right| = |(T_n \circ t)(x_0)|^{-1}$.

(b) Zeigen Sie: $\hat{T}_n$ ist eine Lösung des obigen Minimax-Problems.
Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis. Zeigen Sie, dass ansonsten das Polynom $\hat{T}_n - P \in P_n$ mindestens $n + 1$ Nullstellen hätte.

Hinweis: Für beide Teilaufgaben ist es nützlich, zuerst alle Null- und Extremalstellen des Tschebyscheff-Polynoms T_n in $[-1, 1]$ zu bestimmen. Benutzen Sie dazu die Teilaufgabe (b) der Aufgabe 30.

Lösung:
Zunächst halten wir fest, dass für $n = 0$ nichts zu zeigen ist, gehen also o.B.d.A. von $n \in \mathbb{N}$ aus. Ferner bildet t das Intervall $[a, b]$ bijektiv auf $[-1, 1]$. Nach Aufgabe 30 (b) gilt für alle $x \in [-1, 1]$:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

Weil arccos das Intervall $[-1, 1]$ bijektiv auf $[0, \pi]$ abbildet, können wir alle Null- und Extremalstellen von T_n auf $[-1, 1]$ aus denen von $\cos(n\cdot)$ auf $[0, \pi]$ bestimmen. Es gilt für $\alpha \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \cos(n\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad n\alpha \in \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \{0, \ldots, n-1\} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists m \in \{0, \ldots, n-1\} : \alpha = \frac{\pi}{n}\left(m + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Damit hat T_n auf $[-1, 1]$ genau n Nullstellen $\cos\left(\left\{\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}\right\}\right) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Genauso sieht man ein, dass T_n auf $[-1, 1]$ genau $n{+}1$ Extremalstellen $\cos\left(\left\{0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \pi\right\}\right) = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ hat. Da t streng monoton ist, entsprechen diese Null- und Extremalstellen von T_n auf $[-1, 1]$ eineindeutig denen von $T_n \circ t$ auf I:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \left\{\hat{x}_1 = t^{-1}(x_1), \hat{x}_2 = t^{-1}(x_2), \ldots, \hat{x}_n = t^{-1}(x_n)\right\} \subseteq I \\ \mathcal{M} &= \left\{\hat{y}_0 = t^{-1}(y_0), \hat{y}_1 = t^{-1}(y_1), \ldots, \hat{y}_n = t^{-1}(y_n)\right\} \subseteq I \end{aligned}$$

Es gilt:

(i) $|(T_n\circ)(\hat{y}_m)| = 1$ für alle $m \in \{0,\ldots,n\}$,

(ii) $(T_n \circ t)(\hat{y}_m) \cdot (T_n \circ t)(\hat{y}_{m+1}) = -1$ für alle $m \in \{0,\ldots,n-1\}$ (Vorzeichenwechsel) und

(iii) $a = \hat{y}_n < \hat{x}_n < \hat{y}_{n-1} < \hat{x}_{n-1} < \ldots < \hat{x}_1 < \hat{y}_0 = b$ (Alternierung)

Wir kommen zur Lösung der Aufgabe:

(a) Das Polynom $T_n \circ t$ hat Grad n und damit höchstens n (reelle) Nullstellen. Nach Obigem hat $T_n \circ t$ bereits n Nullstellen in I. Da $x_0 \notin I$ liegt, muss $\frac{1}{C} := (T_n \circ t)(x_0) \neq 0$ sein.

Damit ist $\hat{T}_n$ wohldefiniert. Ferner gilt:

$$\max_{x\in I}\left|\hat{T}_n(x)\right| = \left|\hat{T}_n(\hat{y}_0)\right| = |C|$$

(b) Annahme zum Widerspruch: $\hat{T}_n$ ist keine Lösung des Minimax-Problems. Dann gibt es ein Polynom $P \in \mathbb{P}_n$ mit $P(x_0) = 1$ und $\max_{x\in I} |P|(x) =: M < |C|$. Betrachte die Differenz $Q := \hat{T}_n - P \in \mathbb{P}_n$. O.B.d.A. sei $C > 0$ (betrachte sonst $Q' := -Q$). Es gilt:

$$\begin{aligned} Q(\hat{y}_0) &= \hat{T}_n(\hat{y}_0) - Q(\hat{y}_0) \geq \underbrace{\hat{T}_n(\hat{y}_0)}_{=C} - \underbrace{|Q(\hat{y}_0)|}_{<C} > 0 \\ Q(\hat{y}_1) &= \hat{T}_n(\hat{y}_1) - Q(\hat{y}_0) \leq \underbrace{\hat{T}_n(\hat{y}_1)}_{=-C} + \underbrace{|Q(\hat{y}_0)|}_{<C} < 0 \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $z_1 \in (\hat{y}_0, \hat{y}_1)$ mit $Q(z_1) = 0$. Analog zeigt man $Q(\hat{y}_2) > 0$ und erhält $z_2 \in (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$. Induktiv erhält man so n Nullstellen $\{z_1,\ldots,z_n\} \subseteq I$ von Q. Wegen $Q(x_0) = \underbrace{\hat{T}_n(x_0)}_{=1} - \underbrace{P(x_0)}_{=1} = 0$ und $x_0 \notin I$ hat Q also $n+1$ Nullstellen. Da der Grad von Q höchstens n ist, muss $Q \equiv 0$, bzw. $P = \hat{T}_n$ gelten. Dies steht im Widerspruch zur Annahme.

□

Aufgabe 32:

(a) Zeigen Sie: Die Funktionenfamilie $\mathcal{F} = \{x \mapsto \exp(\mathrm{i}nx) | n \in \mathbb{Z}\}$ bildet ein *Orthogonalsystem* in $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, d.h.:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(\mathrm{i}nx)\overline{\exp(\mathrm{i}mx)}\mathrm{dx} = 0 \qquad (\forall m,n \in \mathbb{Z} \text{ mit } m \neq n)$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a): Die Funktionenfamilie $\mathcal{F}_c = \{x \mapsto \cos(nx) | n \in \mathbb{N}_0\}$ bildet ein Orthogonalsystem in $L^2([0,\pi],\mathbb{R})$, d.h.:

$$\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{dx} = 0 \qquad (\forall m,n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } m \neq n)$$

Hinweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(x) = \frac{\exp(\mathrm{i}x)+\exp(-\mathrm{i}x)}{2}$.

(c) Zeigen Sie: Die Tschebyscheff-Polynome bilden ein Orthogonalsystem bezüglich des durch

$$\langle u,v\rangle_w = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} u(x)v(x)\mathrm{dx}$$

definierten gewichteten Skalarproduktes.

Hinweis: Substituieren Sie im obigen Integral $x = \cos(\alpha)$.

Lösung:

(a) Seien $m,n \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq n$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \exp(\mathrm{i}nx)\overline{\exp(\mathrm{i}mx)}\mathrm{dx} &= \int_{-\pi}^{\pi} \exp(\mathrm{i}(n-m)x)\mathrm{dx} \\
&= \left[\frac{-\mathrm{i}}{n-m}\exp(\mathrm{i}(n-m)x)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{m-n}\left(\exp(\mathrm{i}(n-m)\pi) - \exp(-\mathrm{i}(n-m)\pi)\right) \\
&= \frac{2}{n-m}\sin((n-m)\pi) = 0
\end{aligned}$$

(b) Seien $m,n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \neq n$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{dx} &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{dx} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(\mathrm{i}nx)+\exp(-\mathrm{i}nx)}{2} \cdot \frac{\exp(\mathrm{i}mx)+\exp(-\mathrm{i}mx)}{2}\mathrm{dx} \\
&= \frac{1}{8}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(\mathrm{i}nx)\overline{\exp(-\mathrm{i}mx)} + \exp(\mathrm{i}nx)\overline{\exp(\mathrm{i}mx)} \\
&\quad + \exp(\mathrm{i}mx)\overline{\exp(\mathrm{i}nx)} + \exp(-\mathrm{i}nx)\overline{\exp(\mathrm{i}mx)}\mathrm{dx} \\
&\overset{(a)}{=} 0
\end{aligned}$$

(c) Seien wieder $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \neq n$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\langle T_n, T_m \rangle_w &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) \mathrm{dx} \\
&\overset{x=\cos(\alpha)}{=} \int_0^{\pi} \frac{|sin(\alpha)|}{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}} T_n(\cos(\alpha)) T_m(\cos(\alpha)) \mathrm{dx} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{|sin(\alpha)|}{|\sin(\alpha)|} T_n(\cos(\alpha)) T_m(\cos(\alpha)) \mathrm{dx} \\
&\overset{\text{Auf. 30 (b)}}{=} \int_0^{\pi} \cos(n\alpha) \cos(m\alpha) \mathrm{dx} \\
&\overset{(b)}{=} 0
\end{aligned}$$

□

http://numhpc.math.kit.edu/1375.php