Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS2012/13
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik 4

Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL)
Prof. Dr. Vincent Heuveline
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

Finite Elemente Methoden (FEM)

Lösungsvorschlag für das

14. Übungsblatt

Aufgabe 33:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Betrachten Sie eine glatte Lösung $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T)) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,T])$ des folgenden *Anfangs-Randwertproblems*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) &= u_0(x) \quad \text{für } x \in \overline{\Omega}, t = 0 \\ u(x,t) &= 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega, t \in (0,T) \end{aligned}$$

mit $T > 0$, $f \in C(\Omega \times (0,T)) \cap L^\infty(\Omega \times (0,T))$ und $u_0 \in C(\overline{\Omega})$.

(a) Bestimmen Sie die schwache Formulierung des obigen Problems in $H_0^1(\Omega)$.

(b) Sei $V_h \leq H_0^1(\Omega)$ ein endlich-dimensionaler Funktionenraum. Bestimmen Sie, analog zum Vorgehen bei elliptischen Problemen, die Diskretisierung des obigen ARWPs in V_h.

Hinweis: Sie sollten ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erhalten.

(c) Zeigen Sie, dass das obige System gewöhnlicher Differentialgleichungen eine eindeutige Lösung besitzt.

Lösung:

(a) Sei $t \in (0,T)$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_t(x,t)\varphi(x) - \Delta u(x,t)\varphi(x)\mathrm{dx} &\overset{u \in C^1}{=} \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u(x,t)\varphi(x)\mathrm{dx} - \int_\Omega \Delta u(x,t)\varphi(x)\mathrm{dx} \\ &\overset{\text{S.v.G.}}{=} \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u(x,t)\varphi(x)\mathrm{dx} + \int_\Omega \nabla u(x,t) \cdot \nabla\varphi(x)\mathrm{dx} \\ &= \int_\Omega f(x,t)\varphi(x)\mathrm{dx} \qquad (1) \end{aligned}$$

(b) Sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ eine Basis des Ansatzraumes V_h. Die Näherungslösung u_h ist dann gegeben durch

$$u_h(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(t)\varphi_n(x)$$

für $x \in \Omega$, $t \in [0,T]$ mit nunmehr *zeitabhängigen* Koeffizienten $\alpha_n \in C^1([0,T])$. Die schwache Formulierung aus (1) lautet für V_h:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=1}^{N} \alpha_n(t) \int_\Omega \varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{dx} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(t) \int_\Omega \nabla\varphi_n(x)\cdot\nabla\varphi_m(x)\mathrm{dx} = \int_\Omega f(x,t)\varphi_m(x)\mathrm{dx}$$

für alle $m \in \{1, \dots, N\}$ und $t \in [0,T]$. Die Anfangsbedingung liefert:

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n(0) \int_\Omega \varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{dx} = \int_\Omega u_0(x)\varphi_m(x)\mathrm{dx}$$

für alle $m \in \{1, \dots, N\}$.

(c) Wir definieren für alle $n, m \in \{1, \dots, N\}$ und $t \in (0,T)$:

$$\begin{aligned}
(M_h)_{nm} &:= \int_\Omega \varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{dx} && \text{Massematrix,}\\
(A_h)_{nm} &:= \int_\Omega \nabla\varphi_n(x)\cdot\nabla\varphi_m(x)\mathrm{dx} && \text{Steifigkeitsmatrix,}\\
(b_h)_m(t) &:= \int_\Omega f(x,t)\varphi_m(x)\mathrm{dx} && \text{Lastvektor und}\\
(U_h^0)_m &:= \int_\Omega u_0(x)\varphi_m(x)\mathrm{dx} && \text{rechte Seite}
\end{aligned}$$

Ferner schreiben wir $U_h(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_N(t))^T$ für $t \in [0,T]$. Die Diskretisierung aus (b) schreibt sich nun kompakter als:

$$M_h\dot{U}_h(t) + A_hU_h(t) = b_h(t) \quad \text{für } t \in (0,T), \qquad M_hU_h(0) = U_h^0$$

Die Massematrix M_h ist symmetrisch und positiv definit und als solche invertierbar. D.h. die Diskretisierung hat die folgende äquivalente Darstellung:

$$\dot{U}_h(t) + M_h^{-1}A_hU_h(t) = M_h^{-1}b_h(t) \quad \text{für } t \in (0,T), \qquad U_h(0) = M_h^{-1}U_h^0$$

Diese Anfangswertaufgabe ist eindeutig durch

$$U_h(t) = \exp\left(tM_h^{-1}A_h\right)M_h^{-1}U_h^0 + \int_0^t \exp\left((t-s)M_h^{-1}A_h\right)M_h^{-1}b_h(s)\mathrm{ds} \qquad (t \in [0,T))$$

lösbar (siehe Analysis 3).

□

Aufgabe 34: $2 + 2 = 4$ Punkte
Betrachten Sie die (formale) Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ und $a_0 \neq 0$. Seien $M, N \in \mathbb{N}_0$. Eine rationale Funktion $R(x) = \frac{P_M(x)}{Q_N(x)}$ mit $P_M \in \mathbb{P}_M$ und $Q_N \in \mathbb{P}_N$ sowie $Q_N(0) = 1$ heißt *Padé-Approximant* von f der Ordnung $[M, N]$, falls für alle $n \in \{0, \ldots, M + N\}$ gilt:

$$f^{(n)}(0) = R^{(n)}(0) \tag{2}$$

Zeigen Sie:

(a) Der Padé-Approximant ist eindeutig.

(b) Der Padé-Approximant existiert.

Lösung:

(a) Wegen $Q_N(0) \neq 0$, ist R in einer Umgebung der Null definiert und hat dort, als rationale Funktion, eine Potenzreihendarstellung:

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Sei nun R' ein weiterer Padé-Approximant von f. Wegen der Approximationseigenschaft (2) und der obigen Potenzreihendarstellung für R und R' gilt

$$R(x) - R'(x) = \frac{P_M(x)}{Q_N(x)} - \frac{P'_M(x)}{Q'_N(x)} = \sum_{n=M+N+1}^{\infty} \gamma_n x^n$$

mit bestimmten Koeffizienten $(\gamma_n)_{n>M+N}$. Multiplizieren dieser Gleichung mit den Nennerpolynomen Q_N, Q'_N liefert

$$P_M(x)Q'_N(x) - P'_M(x)Q_N(x) = \sum_{n=M+N+1}^{\infty} \gamma'_n x^n$$

mit weiteren bestimmten Koeffizienten $(\gamma'_n)_{n>M+N}$. Auf der linken Seite dieser Gleichung steht ein Polynom vom Grad höchstens $N + M$. Die rechte Seite besagt, dass dieses Polynom in 0 eine $N + M + 1$-fache Nullstelle hat. D.h. $R(x) = R'(x)$ für alle x innerhalb der Konvergenzscheibe von R.

(b) Ausnutzen des definierenden Gleichung (2) führt auf die (formal) äquivalente Gleichung

$$Q_N(x)f(x) - P_M(x) = \sum_{n=N+M+1}^{\infty} \gamma_n x^n$$

mit bestimmten Koeffizienten $(\gamma_n)_{n>N+M}$, bzw. auf

$$Q_N(x)f(x) = \sum_{n=N+M+1}^{\infty} \gamma_n x^n + P_M(x). \tag{3}$$

Die Koeffizienten der Potenzreihe auf der rechten Seite mit Index $M+1 \leq n \leq M+N$ verschwinden. Die Koeffizienten der Potenzreihe auf der linken Seite haben die Form (Cauchy-Produkt):

$$b_n = \sum_{m=0}^{n} q_m a_{n-m}$$

Dies führt auf ein homogenes unterbestimmtes lineares Gleichungssystem für q_m — Koeffizienten des Polynoms Q_N (N Gleichungen bei $N+1$ Unbekannten):

$$\begin{pmatrix} a_{M+1} & a_M & \cdots & a_{M+1-N} \\ a_{M+2} & a_{M+1} & \cdots & a_{M+2-N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M+N} & A_{M+N-1} & \cdots & a_M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

In der obigen Gleichung sind die möglicherweise vorhandenen a_n für $n < 0$ gleich 0 zu setzen.

Wegen der Unterbestimmtheit, hat (4) eine nicht-triviale Lösung $(q_0, \ldots q_N)^T$. Einsetzen dieser Lösung in (3) liefert duch Koeffizientenvergleich P_M.

Es bleibt nur noch $q_0 = 1$ sicherzustellen: Sei n_0 der kleinste Index für den $q_n \neq 0$ ist. Dieser existiert, da $(q_0, \ldots q_N)^T \neq 0$ ist. Aus (3) folgt, dass das Monom x^{n_0} sowohl P_M als auch Q_N teilt. Man kann also (3) durch $q_{n_0}x^{n_0}$ teilen und erhält korrekt normierte Polynome P_M und Q_N.

□

http://numhpc.math.kit.edu/1375.php