Universität Karlsruhe (TH) **15.04.2005**
Institut für Angewandte Mathematik
Zirkel 2, Zi. 301
Prof. Dr. Vincent Heuveline

1. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I
(SoSe 2005)

1. (4 Punkte)

   Man betrachte eine Lösung u der Wellengleichung
   $$u_{tt} = c^2 \Delta u.$$
   Zur Zeit t gelte $u = 0$ außerhalb einer beschränkten Menge. Man zeige, dass die Energie
   $$\int_{\mathbb{R}^d} [u_t^2 + c^2 (\nabla u)^2] \; dx \tag{1}$$
   konstant ist.
   Hinweis: Man schreibe die Wellengleichung in der symmetrischen Form
   $$\begin{aligned} \partial_t u &= c \nabla \cdot v \\ \partial_t v &= c \nabla u, \end{aligned}$$
   und stelle die Zeitableitung des Integranden in (1) als Divergenz dar.

2. (4 Punkte)

   Die Potentialgleichung sei im Kreis $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ mit der Randwertvorgabe für die Ableitung in Normalenrichtung
   $$\frac{\partial}{\partial r} u(x) = g(x) \qquad \text{für } x \in \partial\Omega,$$
   zu lösen. Man bestimme eine Lösung, wenn g als Fourier-Reihe ohne Konstanten Term
   $$g(\cos\phi, \sin\phi) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi)$$
   gegeben ist.

Abgabe: Dienstag 26.04.2005 bei der Übung