Universität Karlsruhe 21.06.2005
Institut für Angewandte Mathematik
Zirkel 2, Zi. 301
Prof. Dr. Vincent Heuveline

10. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen

(SoSe 2005)

1. (6 Punkte)

   Man untersuche den Einfluß der numerischen Integration auf die Fehlerabschätzung:

   a) Man beweise für φ_g aus $a(v,\, \varphi_g) = (g,\, v)_H$ mit $H = L_2(\Omega)$ die abstrakte Fehlerabschätzung

   $$|u - u_h|_0 \leq \sup_{g \in H} \frac{1}{|g|_0} \inf_{\varphi_h \in V_h} \{M \|u - u_h\| \|\varphi_g - \varphi_h\| + |a(u_h, \varphi_h) - a_h(u_h, \varphi_h)| + |f(\varphi_h) - f_h(\varphi_h)|\}$$

   wobei $u \in V \subset H$ die Lösung des Problems $a(u,\, v) = f(v)$ und $u_h \in V_h$ die entsprechende diskrete Lösung ist.

   b) Man wende das abstrakte Ergebnis aus a) auf die stückweise polynomiale FEM-Diskretisierung der Aufgabe

   $$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

   mit numerischer Integration an, wobei Ω ein konvexes Polygon ist. Welche L_2-Konvergenzordnung wird erreicht? Welche Integrationsformeln sind sinnvollerweise anzuwenden?

2. (4 Punkte)

   Gegeben sei ein polygonal berandetes, zulässig trianguliertes Gebiet Ω, wobei $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ ist. Ferner sei $Q_h(u)$ eine Quadraturformel für $J(u) = \int_\Omega u\, d\, x$, die elementweise P_l exakt ist. Der Integrand u liege in $C^m(\overline{\Omega})$. Man schätze den Integrationsfehler $|J(u) - Q_h(u)|$ in Abhängigkeit von l und m ab.

<u>**Abgabe:**</u> Dienstag, 28.06.2005, in der Übung.