Universität Karlsruhe
Institut für Angewandte Mathematik
Zirkel 2, Zi. 301
Prof. Dr. Vincent Heuveline

28.06.2005

11. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen

(SoSe 2005)

1. (8 Punkte)

   Sei $\Omega := (0,1)$. Man diskretisiere für $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ die Randwertaufgabe

$$-\partial_{xx}^2 u + b\partial_x u + cu = 0 \quad \text{in } (0,1), \qquad u(0) = \alpha, \qquad u(1) = \beta$$

   mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $b, c \in C^0([0,1])$ unter Verwendung der Finite Elemente Methode und benutze hierzu lineare Lagrange-Elemente auf einer uniformen Zerlegung des Gebietes Ω. Man diskutiere anschließend die entstehenden Differenzenverfahren bezüglich Struktur, Konsistenz und Stabilität, wenn für die Integration die

   a) Mittelpunktsregel $\int_0^1 u(t)\,dt \approx u(1/2)$,

   b) einseitige Rechtecksregel $\int_0^1 u(t)\,dt \approx u(0)$,

   c) Trapezregel $\int_0^1 u(t)\,dt \approx \big(u(0) + u(1)\big)/2$,

   d) Simpsonregel $\int_0^1 u(t)\,dt \approx \big(u(0) + 4\,u(1/2) + u(1)\big)/6$

   genutzt werden.

2. (3 Punkte)

   Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \geqslant 1$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Man zeige, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $u \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\|u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx\|_{L_2(\Omega)} \le C\,\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}.$$

   Diese Ungleichung verallgemeinert die Poincaré-Ungleichung.

   Hinweis: Lemma von Bramble-Hilbert.

Abgabe: Dienstag, 05.07.2005, in der Übung.