Universität Karlsruhe (TH) **27.04.2005**
Institut für Angewandte Mathematik
Zirkel 2, Zi. 301
Prof. Dr. Vincent Heuveline

2. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I
(SoSe 2005)

1. (4 Punkte)

Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ sei definiert durch

$$(Lv)_j := b_j v_{j-1} - a_j v_j + c_j v_{j+1}, \qquad j = 1, \cdots, n-1$$

mit Koeffizienten $b_j > 0$, $c_j > 0$ und $a_j \geq b_j + c_j$ für $j = 1, \cdots, n-1$.
(a) Man beweise das folgende **diskrete Maximumprinzip**:
Wenn für den Vektor $v = (v_0, \cdots, v_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $Lv \geq 0$ die folgende Bedingung erfüllt ist,

$$v_{j_*} = \max_{j=0,\cdots,n} v_j \qquad \text{wobei } 1 \leq j_* \leq n-1$$

so gilt $v_0 = v_1 = \cdots = v_n$.
(b) Man beweise die **inverse Monotonie** von $-L$:
Wenn für Zahlen u_j und $v_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0, \cdots, n)$ die Bedingungen

$$-Lu \leq -Lv, \qquad u_0 \leq v_0,\ u_n \leq v_n$$

erfüllt sind, so gilt $u \leq v$.

2. (2 Punkte)

Gegeben sei eine Zerlegung $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$ des Intervalls $[a, b]$ und

$$h_{max} = \max_{k=0,\cdots,n-1} (x_{k+1} - x_k)$$

bezeichne den maximalen Knotenabstand. Man zeige: für jede stückweise stetig differenzierbare Funktion f mit

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0,$$

gilt die Abschätzung

$$\|f\|_2 \leq h_{max} \|f'\|_2.$$

Abgabe: Dienstag 3.05.2005 bei der Übung