Universität Karlsruhe (TH) **03.05.2005**

Institut für Angewandte Mathematik

Zirkel 2, Zi. 301

Prof. Dr. Vincent Heuveline

3. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen

(SoSe 2005)

1. (3 Punkte)

   Man bestimme den Typ der Differentialgleichungen

   a) $\partial_x \partial_y u - \partial_x u = 0$,

   b) $\partial_x^2 u + \partial_x \partial_y u + y \partial_y^2 u + 4u = 0$,

   c) $2(\partial_x + \partial_y)^2 u + \partial_y u = 0$.

   Hinweis: der Typ muss zum Teil punktweise definiert werden.

2. (4 Punkte)

   Auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$ werden die folgenden Randwertaufgaben betrachtet:

   a) $-\Delta u + au = f$ in Ω, $\qquad \partial_n u = g$ auf $\partial\Omega$,

   b) $-\Delta u + au = f$ in Ω, $\qquad \partial_n u + \alpha u = g$ auf $\partial\Omega$,

   mit Konstanten $a > 0$ und $\alpha > 0$. Man zeige, dass diese Randwertaufgaben höchstens eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ haben können. Welches Problem ergibt sich im Fall $a = 0$, d.h. für den reinen Laplace-Operator?

3. (4 Punkte)

Der Laplace-Operator hat für Funktionen $u = u(r, \theta)$ in Polarkoordinaten $(r, \theta) \in [0, \infty) \times (0, 2\pi]$ die folgende Form:

$$\Delta u = \partial_r^2 u + \tfrac{1}{r}\partial_r u + \tfrac{1}{r^2}\partial_\theta^2 u.$$

a) Für ein $\omega \in (0, 2\pi]$ sei $S_\omega = \{(r, \theta): r > 0, \theta \in (0, \omega)\}$ der zugehörige Sektor der (x, y)-Ebene. Man zeige, dass die auf dem Gebiet $G := S_\omega \cap K_1(0)$ definierte Funktion

$$s_\omega(r, \theta) := r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(\tfrac{\theta\pi}{\omega})$$

harmonisch ist, d.h. dass $\Delta s_\omega = 0$ und dass sie den Randbedingungen

$$s_\omega(r, 0) = s_\omega(r, \omega) = 0,$$

sowie

$$s_\omega(1, \theta) = \sin(\tfrac{\theta\pi}{\omega}),$$

genügt.

b) Man zeige, dass für $\pi < \omega \leq 2\pi$, d.h. im Fall eines stumpfen Innenwinkels, die ersten Ableitungen dieser Funktion zwar unbeschränkt aber noch quadrat-integrabel sind, dass ihre zweiten Ableitungen aber nicht mehr quadrat-integrabel sind. Wie sieht es bei spitzem Innenwinkel, d.h. $0 < \omega < \pi$, aus?

Abgabe: Dienstag, 10.05.2005 in der Übung.