Universität Karlsruhe
Institut für Angewandte Mathematik
Zirkel 2, Zi. 301
Prof. Dr. Vincent Heuveline

10.05.2005

4. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen

(SoSe 2005)

1. (2 Punkte)

   Das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

   zur Poisson-Gleichung im Einheitsquadrat hat die Eigenfunktionen

$$u_{k,l}(x,y) = \sin(k\pi x)\sin(l\pi y), \qquad k,l = 1,2,\ldots$$

   Man zeige, dass die Restriktion dieser Eigenfunktionen auf ein regelmäßiges Quadratnetz Ω_h die Eigenfunktionen des in der Vorlesung beschriebenen Differenzenoperators Δ_h (5-Punkteformel) darstellt. Werden die kleinen oder die großen Eigenwerte besser approximiert?

2. (4 Punkte)

   Man diskretisiere die Randwertaufgabe

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \ \Omega = (0,1)^2$$

   bei homogenen Dirichlet-Randbedingungen auf einem regelmäßigen Quadratnetz Ω_h. Dabei werden folgende Formeln betrachtet:

$$\begin{aligned} -\Delta_h^{(9)} u &= f && \text{in } \Omega_h, && (1)\\ -\Delta_h^{(9)} u_h &= f + \frac{1}{12}h^2\Delta f && \text{in } \Omega_h, && (2)\\ -\tilde{\Delta}_h^{(9)} u_h &= f && \text{in } \Omega_h, && (3) \end{aligned}$$

   wobei

$$\begin{aligned} \Delta_h^{(9)} u_h(x,y) &:= \frac{1}{6h^2}\Big\{4u(x\pm h,y) + 4u(x,y\pm h) + u(x\pm h,y\pm h) - 20u(x,y)\Big\}, \\ \tilde{\Delta}_h^{(9)} u_h(x,y) &:= \frac{1}{12h^2}\{-u(x\pm 2h,y) + 16u(x\pm h,y) - u(x,y\pm 2h) \\ &\quad + 16u(x,y\pm h) - 60u(x,y)\}. \end{aligned}$$

a) Man zeige, dass die Diskretisierung (1) die Konsistenzordnung $m = 2$ besitzt.

b) Man zeige, dass die Diskretisierungen (2) und (3) die Konsistenzordnung $m=4$ besitzen.

c) Welche numerisch ungünstigen Eigenschaften hat die Formel (3)?

3. (4 Punkte)

In vielen Fällen kann die asymptotische Konvergenzordnung eines Differenzenverfahrens nur experimentell bestimmt werden. Dazu werden bei bekannter exakter Lösung u für zwei Schrittweiten h und $h/2$ die Fehler $e_h := u - u_h$ und $e_{h/2} := u - u_{h/2}$ berechnet und dann die Ordnung α über den formalen Ansatz $\|u - u_h\|_h = Ch^\alpha$ mit einer geeigneten Gitternorm $\|\cdot\|_h$ aus der folgenden Formel ermittelt:

$$\alpha = \frac{\log(\|e_h\|_h / \|e_{h/2}\|_h)}{\log(2)}.$$

a) Man rechtfertige diese Formel und überlege, wie man vorgehen kann, wenn keine exakte Lösung u bekannt ist.

b) Man bestimme die Konvergenzordnung, die mit den folgenden Zahlenfolgen assoziiert ist:

h	Folge 1	Folge 2
2^{-1}	33.627	26.570
2^{-2}	30.318	27.008
2^{-3}	29.100	27.883
2^{-4}	28.586	28.072
2^{-5}	28.351	28.117

Abgabe: Dienstag, 17.05.2005, in der Übung.