Universität Karlsruhe 17.05.2005
Institut für Angewandte Mathematik
Zirkel 2, Zi. 301
Prof. Dr. Vincent Heuveline

5. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen

(SoSe 2005)

1. (3 Punkte)

   Für zwei Matrizen $A, \hat{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit Zerlegungen $A = D + L + R$ beziehungsweise $\hat{A} = \hat{D} + \hat{L} + \hat{R}$ mit Diagonalanteilen D bzw. $\hat{D}$ sowie linken unteren und rechten oberen Dreiecksmatrizen L, $\hat{L}$ bzw. R, $\hat{R}$ zeige man:

   Wenn A eine M-Matrix ist und $0 \leq D \leq \hat{D}$, $0 \geq \hat{L} + \hat{R} \geq L + R$ erfüllt sind, so ist auch $\hat{A}$ eine M-Matrix mit $0 \leq \hat{A}^{-1} \leq A^{-1}$.

2. (3 Punkte)

   Für eine Matrix $A = (a_{k,j}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ beweise man die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   a) A ist eine M-Matrix,

   b) $A + s\,I$ ist eine M-Matrix für alle $s \geq 0$,

   c) es gibt eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit $B \geq 0$ und eine Zahl $s > \rho(B)$, so dass die Identität $A = s\,I - B$ gilt,

   d) die Nichtdiagonaleinträge $a_{k,j}$, $k \neq j$, der Matrix A sind nichtpositiv, und alle Eigenwerte von A besitzen einen positiven Realteil, $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \Re e(\lambda) > 0\}$.

3. (5 Punkte)

   Gegeben sei das lineare Randwertproblem

$$-u''(x) + \frac{1}{1+x}u'(x) = \varphi(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{1}$$

   Die Diskretisierung von (1) mit zentralen Differenzenquotienten zweiter beziehungsweise erster Ordnung bei konstanter Gitterweite $h := 1/N$ führt auf ein lineares Gleichungssystem $A\,v = b$.

Man zeige folgendes:

a) Für $h<2$ ist $A\in\mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ eine M-Matrix.

b) Für die Hilfsfunktion

$$\theta(x):=-\frac{(1+x)^2}{2}\ln(1+x)+\frac{2}{3}x(x+2)\ln 2$$

und mit den Notationen $v_j:=\theta(x_j)$, $x_j:=j\,h$ für $j=1,\ldots,N-1$ und $e:=(1,\ldots,1)^T\in\mathbb{R}^{N-1}$ gilt die Abschätzung

$$\|A\,v-e\|_\infty\le\frac{1}{4}h^2$$

(und damit $(A\,v)_j\ge 1-h^2/4$ für $j=1,\ldots,N-1$).

c) Für eine von h unabhängige Konstante M gilt $\|A^{-1}\|_\infty\le M$.

d) Für die Lösung u von (1) und die Lösung v des Gleichungssystems $A\,v=b$ gilt mit der Notation $z:=(u(x_j))_{j=1}^{N-1}$ und einer von h unabhängigen Konstanten K die Abschätzung $\|v-z\|_\infty\le K\,h^2$.

Abgabe: Dienstag, 24.05.2005, in der Übung.