# Ü6 Material (7.6.2005)

## Varianten von Lax-Milgram

**Satz 1. (Lax-Milgram ohne Symmetrie)** *Sei $X$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ und Norm $\|\cdot\|$. Weiter sei $a\colon X\times X\to\mathbb{R}$ eine Bilinearform mit*

*i.* $|a(x,y)|\leqslant C_0\|x\|\,\|y\|$ *(Stetigkeit),*

*ii.* $a(x,x)\geqslant c_0\|x\|^2$ *(Koerzivität, beachte: kein Betrag!),*

*wobei $0<c_0\leqslant C_0<\infty$. Dann gibt es genau ein $x\in X$ mit $a(y,x)=l(y)$ für alle $y\in X$.*

**Beweis.** (vgl. H.-W. Alt, Lineare Funktionalanalysis. Springer, 1992. Satz 4.7) Sei zunächst $x\in X$. Das lineare Funktional $a(\,\cdot\,,x)$ ist nach i) stetig. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert daher genau ein $A(x)\in X$ mit

$$a(y,x)=(y,A\,(x))\quad\text{für alle } y\in X.$$

Es gilt

$$\|A\,(x)\|=\|a(\,\cdot\,,x)\|_{X'}\leqslant C_0\|x\|,$$

also ist $A$ stetig und seine Norm durch $C_0$ beschränkt. $A$ ist auch offensichtlich linear.

*A ist injektiv:* Es gilt

$$c_0\|x\|^2\leqslant a(x,x)=(x,A\,x)\leqslant\|x\|\,\|A\,x\|,$$

also

$$c_0\|x\|\leqslant\|A\,x\|.$$

Dies ergibt $A\,x=0\Rightarrow x=0$, also ist $A$ injektiv. Im endlichdimensionalen Fall sind Injektivität und Bijektivität äquivalent, im unendlichdimensionalen Fall (hier!) müssen wir aber die Surjektivität separat zeigen. Dies wollen wir mit Hilfe einer Orthogonalprojektion auf den Bildraum tun. Um eine solche zu erhalten, benötigen wir die folgende

*Bemerkung:* Der Bildraum von $A$ ist abgeschlossen. Sei nämlich $\{A\;x_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge in A(X) und $y$ ihr Grenzwert. Zu zeigen ist dann $y\in A(X)$. Dann geht

$$\|x_k-x_l\|\leqslant\frac{1}{c_0}\|A(x_k-x_l)\|\to 0$$

für $k,l\to\infty$, denn die $\{A\;x_k\}_{k=1}^{\infty}$ sind ja eine Cauchyfolge. Damit sind aber auch die $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge, und es gilt $x_k\to x$ für ein $x\in X$. Wegen der Stetigkeit von $A$ haben wir aber $A\,x=y$, also $y\in A(X)$.

*A ist surjektiv:* Angenommen, $A$ sei nicht surjektiv, d.h. $A(X)\neq X$. Auf abgeschlossene Unterräume kann man in Hilberträumen projizieren. Sei also $P$ die durch die Bedingung

$$x-Px\perp A(X)$$

vorgegebene Orthogonalprojektion auf $A(X)$. Wähle nun $x\in X\setminus A(X)$ und fälle das Lot $\tilde{x}:=x-Px$. Dann gilt

$$c_0\|\tilde{x}\|^2\leqslant a(\tilde{x},\tilde{x})=(\tilde{x},A\tilde{x})=(x-Px,A\,\tilde{x})=0$$

Damit folgt $\|\tilde{x}\|^2 = 0$, also $x \in A(X)$ im W! zur Annahme.

*Existenz der Lösung:* Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es nun ein $z \in X$, so dass wir $(y, z) = l(y)$ für alle $y \in X$ erhalten. Für alle $y \in X$ soll $(y, A\,x) = (y, z)$ gelten, wähle also $x := A^{-1}z$ als Lösung.

*Eindeutigkeit:* Sei $\tilde{x} \in X$ eine weitere Lösung. Dann gilt also für alle $y \in X$ die Gleichung $0 = a(y, x - \tilde{x}) = (y, A(x - \tilde{x}))$, weswegen nur $A(x - \tilde{x}) = 0$ gelten kann. Nun ist $0 = \|A(x - \tilde{x})\| \geqslant c_0\|x - \tilde{x}\| \geqslant 0$, also $x = \tilde{x}$. □

**Satz 2. (Lax-Milgram mit größerem Testraum)** *Sei $X$ ein Hilbertraum wie oben und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei $a: X \times X \to \mathbb{R}$ eine stetige, $Y$-koerzive Bilinearform mit*

$$a(u + z_1, v + z_2) = a(u, v) \quad \textit{für } u, v \in X, z_1, z_2 \in Y^{\perp}.$$

*Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in Y$ von „$a(u, v) = l(v)$ für alle $v \in X$“ genau dann, wenn $l(z) = 0$ für alle $z \in Y^{\perp}$.*

**Beweis.** B. Dayanand Reddy, Functional analysis and boundary-value problems. Longman, 1986. §36, Theorem 2. (via Orthogonalzerlegung in $Y \oplus Y^{\perp}$) □

## Lipschitzgebiete, Spursatz

**Definition 3.** *Man sagt, $\Omega$ hat einen* Lipschitzrand*, bzw. $\Omega$ ist ein* Lipschitzgebiet*, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ und offene Mengen $U_1, \ldots, U_N \subset \mathbb{R}^d$ mit den Eigenschaften*

1. $\partial\Omega \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant N} U_i$,
2. *Für jedes $1 \leqslant i \leqslant N$ ist $\partial\Omega \cap U_i$ darstellbar als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion.*

**Bemerkung 4.** (Kegelbedingung) $\Omega$ habe einen stückweise glatten Rand. Zudem gebe es zu jedem $x_0 \in \partial\Omega$ einen nichttrivialen Kegel $K_0$ mit Basis $x_0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d \setminus K_0$. Dann ist $\Omega$ ein Lipschitzgebiet.

**Beispiel.** Weitere Beispiele für Lipschitzgebiete sind Würfel, Kugeln, oder allgemeiner jedes konvexe Gebiet.

**Satz 5.** *(Spursatz) Sei $\Omega$ ein offenes Lipschitz-Gebiet und seien weiter $k \in \mathbb{N}$, $l \in \{0, \ldots, k-1\}$. Dann gibt es eine stetige lineare Abbildung $\gamma_l: W^{k,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ mit der Eigenschaft*

$$\gamma_l(\varphi) = \partial_n^l \varphi|_{\partial\Omega} \quad \forall \varphi \in C^k(\bar{\Omega}).$$

**Beweis.** s. R. A. Adams, Sobolev Spaces. Academic Press, 1975. □

## Noch eine Poincaré-Abschätzung

**Satz 6.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und Lipschitz. Dann gibt es Konstanten $C_1$, $C_2$, so dass für jedes $u \in H^1(\Omega)$*

$$\|u\|_0^2 \leqslant C_1 \|\nabla u\|_0^2 + C_2 \left( \int_\Omega u \right)^2.$$

**Beweis.** (vgl. Dayanand Reddy, §26, Thm. 3) Wir betrachten nur $\Omega = (a, b)$. Seien $\xi, \eta \in (a, b)$.

$$[u(\xi) - u(\eta)]^2 \;=\; \left( \int_\xi^\eta u' \right)^2 \underset{\text{CSU}}{\leqslant} \int_\xi^\eta 1^2 \int_\xi^\eta (u')^2 \leqslant (b-a) \int_a^b (u')^2.$$

Integriere diesen Ausdruck nach $\xi$ und $\eta$:

$$(b-a) \left[ \int_a^b u^2(\xi) d\xi + \int_a^b u^2(\eta) d\eta \right] - 2 \int_a^b u(\xi) d\xi \int_a^b u(\eta) d\eta \;\leqslant\; (b-a)^3 \int_a^b (u')^2.$$

□