Ü6 Vorbereitung (7.6.2005)

Übungsblätter 7 einsammeln.

Aufgabe 1a.

1. Greensche Formel: Seien $d \in \{2,3\}$, $f, g \in C^1(U, \mathbb{R})$, $B \subset \mathbb{R}^d$ zulässig (wie im Gaußschen Integralsatz), $U \supseteq B$ offen. Dann

$$\int_{\partial B} f(\nabla g) \cdot d\boldsymbol{n} = \int_V f \Delta g + (\nabla f) \cdot (\nabla g).$$

Zielsetzung der Aufgabe: Wie zeigt man Koerzivität und Stetigkeit bei a) komplizierterem Differentialoperator, b) komplizierteren Randbedingungen? Welche Bedingungen sind an die Bestandteile zu stellen?

Klarstellung: Ω offen, beschränkt. b_1, b_2, c Funktionen.

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \int_\Omega -(\Delta u)v + b_1 \partial_x u\, v + b_2 \partial_y u\, v + c\, u\, v &= \int_\Omega g\, v \\ \underset{\text{G1}}{\Leftrightarrow} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \underbrace{\int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot d\boldsymbol{n}}_{=0} + \int_\Omega \nabla u \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}:=} v + c\, u\, v &= \int_\Omega g\, v. \end{aligned}$$

Auf $H_0^1(\Omega)$ definiert man die Bilinearform

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \nabla u \cdot \boldsymbol{b}\, v + c\, u\, v$$

und das Funktional

$$l(v) := \int_\Omega g\, v.$$

Schwache Formulierung ist dann:

$$\text{Finde } u \in H_0^1(\Omega) \text{, so dass } a(u,v) \;=\; l(v) \text{ für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Zu zeigen sind (als Voraussetzungen von Lax-Milgram):

- a stetig: $|a(u,v)| \leqslant C \|u\|_1 \|v\|_1$.
- a koerziv: $a(u,u) \geqslant \lambda \|u\|_0^2$.
- a symmetrisch? *Klar, kein Problem.* }:-)
- l stetig: $|l(v)| \leqslant C \|v\|_1$.

Fragen? Handout austeilen, Nichtsymmetrischen Lax-Milgram besprechen.

Stetigkeit von a:

$$\begin{aligned} & |a(u,v)| \\ & \leqslant \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v + \nabla u \cdot \boldsymbol{b} v + c\, u\, v| \\ (\Delta\text{-Ungl.}) & \leqslant \|\nabla u \cdot \nabla v\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla u \cdot \boldsymbol{b} v\|_{L^1(\Omega)} + \|c\, u\, v\|_{L^1(\Omega)} \\ (\text{Hölder}) & \leqslant \|\nabla u \cdot \nabla v\|_{L^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{b}\|_\infty \|(\nabla u) v\|_{L^1(\Omega)} + \|c\|_\infty \|u\, v\|_{L^1(\Omega)} \\ (\text{CSU}) & \leqslant \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 + \|\boldsymbol{b}\|_\infty \|\nabla u\|_0 \|v\|_0 + \|c\|_\infty \|u\|_0 \|v\|_0 \\ & \leqslant \underbrace{(1 + \|\boldsymbol{b}\|_\infty + \|c\|_\infty)}_{C:=} \|u\|_1 \|v\|_1. \end{aligned}$$

Bedingung: $\boldsymbol{b}, c \in L^\infty(\Omega)$.

Koerzivität:

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega |\nabla u|^2 + \nabla u \cdot \boldsymbol{b} u + c\,u^2 \\
\text{(Poincaré-U)} \quad \geqslant\ & \frac{1}{\gamma}\|u\|_0^2 + \int_\Omega \nabla u \cdot \boldsymbol{b} u + c\,u^2 \\
=\ & \frac{1}{\gamma}\|u\|_0^2 + \int_\Omega \frac{1}{2}\nabla(u^2) \cdot \boldsymbol{b} + c\,u^2 \\
\overset{!}{=}\ & \frac{1}{\gamma}\|u\|_0^2 + \int_\Omega \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{b} + c\right)}_{\overset{!}{\geqslant} 0} u^2 \\
\geqslant\ & \frac{1}{\gamma}\|u\|_0^2
\end{aligned}
$$

was zu zeigen war. *Fragen? Warum gilt der Schritt mit dem '!'?*

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{b} u^2 \cdot d\boldsymbol{n} \underset{\text{Gauß}}{=} & \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{b}\,u^2) \\
= & \int_\Omega \boldsymbol{b} \cdot \nabla(u^2) + (\operatorname{div}\boldsymbol{b})u^2.
\end{aligned}
$$

Bedingung also: $-1/2\operatorname{div}\boldsymbol{b} + c \geqslant 0$. Zusätzlich verlangen wir $\boldsymbol{b} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d)$, $c \in C(\bar{\Omega})$.

Stetigkeit von L:

$$
\left|\int_\Omega g\,v\right| \leqslant \int_\Omega |g\,v| \leqslant \|g\|_0 \|v\|_0.
$$

Bedingung also: $g \in L^2(\Omega)$.

Zusammenfassung:

- $\boldsymbol{b}, c \in L^\infty(\Omega)$,
- $g \in L^2(\Omega)$,
- $-1/2\operatorname{div}\boldsymbol{b} + c \geqslant 0$, $\boldsymbol{b} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d)$, $c \in C(\bar{\Omega})$.

Aufgabe 1b.

Hier natürlich Ω ebenso beschränkt. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $v \in C^\infty(\Omega)$ und $v(\Gamma_1) = \{0\}$. O.B.d.A. $\sigma \neq 0$. Damit wir in 3b nicht von vorn anfangen müssen, hier mit rechter Seite.

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega f\,v &= \int_\Omega -\Delta u\,v \\
\underset{\text{G1}}{\Leftrightarrow} \int_\Omega f\,v &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma_1} \underbrace{v}_{=0} \nabla u \cdot d\boldsymbol{n} - \int_{\Gamma_2} v \underbrace{\nabla u \cdot d\boldsymbol{n}}_{=h_2 ds} - \int_{\Gamma_3} v \underbrace{\nabla u \cdot d\boldsymbol{n}}_{=h_3 - \sigma u ds} \\
\Leftrightarrow \int_\Omega f\,v + \int_{\Gamma_2} v\,h_2 + \int_{\Gamma_3} v\,h_3 &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_3} \sigma u\,v\,ds
\end{aligned}
$$

Man definiert also die Bilinearform

$$
a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_3} \sigma u\,v\,ds
$$

und das Funktional

$$l(v) := \int_\Omega f v + \int_{\Gamma_2} v h_2 + \int_{\Gamma_3} v h_3.$$

Schwache Formulierung ist dann:

$$\text{Finde } u \in U, \text{ so dass } a(u,v) = l(v) \text{ für alle } v \in V,$$

Dabei sind U, $V \subset H^1(\Omega)$ noch zu findende Räume. *Fragen?* Es ist überhaupt nicht klar, was wir mit den Randintegralen meinen. Γ_i sind typischerweise Nullmengen. Auch die Dirichlet-Randwerte sind nicht klar. Also was nun?

Material: Lipschitzgebiete. Kegelbedingung illustrieren.

Stetigkeit von a: Für $u, v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leqslant \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v| + \int_{\Gamma_3} |\sigma||u v|\, ds \\
(3 \times \text{Hölder}) &\leqslant \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 + \|\sigma\|_{\infty,\Gamma_3} \|u\|_{0,\Gamma_3} \|v\|_{0,\Gamma_3} \\
&\leqslant \|u\|_1 \|v\|_1 (1 + \|\sigma\|_{\infty,\Gamma_3} C).
\end{aligned}$$

Denn: Wenn wir Ω als Lipschitz voraussetzen, so existiert ein γ_0: $H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, das die stetige Einschränkung fortsetzt und mit einer Konstante $C > 0$ die Bedingung

$$\|\gamma_0(u)\|_{0,\partial\Omega} \leqslant C \|u\|_1$$

erfüllt.

Symmetrie: ok.

Stetigkeit von L: $f \in L^2(\Omega)$, $h_2 \in L^2(\Gamma_2)$, $h_3 \in L^2(\Gamma_3)$.

Für die Koerzivität behandeln wir hier nur zwei Fälle–und die sind schon genug Arbeit:

- *Fall Dirichlet:* Sei $\Gamma_1 \neq \emptyset$. Wir setzen

  $$U := V := H^1(\Omega) \cap \gamma_{\Gamma_1}^{-1}(\{0\}).$$

  Stetigkeit von γ_{Γ_1} sichert Abgeschlossenheit von U. Mit Aufgabe 2 (oder *schwarzer Magie* für $\Gamma_1 \neq \partial\Omega \to$ Verweis Dörfler-Skript) folgt dank geltender Poincaré-Abschätzung

  $$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u + \underbrace{\int_{\Gamma_3} \sigma u^2\, ds}_{\overset{!}{\geqslant} 0} \geqslant \frac{1}{\gamma} \|u\|_0^2.$$

  Also: Forderung $\sigma \geqslant 0$.

- *Neumann:* Sei $\Gamma_2 = \partial\Omega$. Koerzivität auf ganz $H^1(\Omega)$ können wir nicht erreichen: Für konstantes $u \neq 0$ gilt

  $$0 = a(u,u) \not\geqslant \lambda \|u\|_2 > 0$$

  für jedes $\lambda > 0$. Die konstanten Funktionen machen also Ärger. Betrachten wir statt dessen $U := \text{Const}^\perp$, also

  $$U = \left\{ u \in H^1(\Omega) \colon \int_\Omega u = 0 \right\}.$$

Was machen wir jetzt? $V := U$ wählen? Wähle dann ein $c \in \text{Const}$ mit $l(c) \neq 0$. Wir erhalten eine Lösung $u \in U$, so dass für alle $v \in U$ gilt

$$l(v) = a(u, v).$$

Aber:

$$a(u, v) = a(u, \underbrace{v + c}_{\in H^1(\Omega)}) \overset{!}{=} l(v + c) \neq l(v)!$$

Die Gleichung gilt also nicht mit $H^1(\Omega)$ als Testfunktionenraum! Schlecht. $V := U$ geht nicht.

Also brauchen wir den ganzen $V := H^1(\Omega)$ als Testfunktionenraum. Auch schlecht, denn das kann unser Lax-Milgram nicht! Also brauchen wir noch eine Erweiterung, s. Material. (Merkregel: Tausche größeren Testraum gegen Extra-Bedingung) Hier: $X = H^1(\Omega)$, $Y = U$.

- U abgeschlossen: klar, via CF.
- a Y-koerziv? Ja: Andere Poincaré-Abschätzung (s. Material).
- a stetig? Ja: s.o.
- Nullraum von a:

  $$a(u + z_1, v + z_2) = a(u, v) \quad \text{für } u, v \in X, z_1, z_2 \in \text{Const}.$$

  Klar.
- $Y^\perp = (\text{Const}^\perp)^\perp = \text{Const}$ wegen Abgeschlossenheit! (Beachte, dass der Ableitungsanteil des $H^1(\Omega)$-SP keinen Einfluss hat!) Also: $l(1) = 0$ ist eine Extra-Bedingung, die so genannte „*Kompatibilitätsbedingung*“.

Dann funktioniert's.

Zusammenfassung:

- Ω beschränkt, Lipschitz
- $\sigma \in L^\infty(\Gamma_3)$, $\sigma > 0$,
- $h_2 \in L^2(\Gamma_2)$, $h_3 \in L^2(\Gamma_3)$, $f \in L^2(\Omega)$.
- Im Neumann-Fall zusätzlich: für $c(x) := 1$

  $$l(c) = \int_\Omega f + \int_{\Gamma_2} h_2 = 0.$$

Aufgabe 3a.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega -\Delta u(x, y) v(x, y) d(x, y) &= \int_\Omega \pi^2 \cos(\pi x) v(x, y) d(x, y) \\
\underset{\text{G1}}{\Leftrightarrow} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} v \underbrace{\nabla u \cdot d\boldsymbol{n}}_{=0} &= \int_\Omega \pi^2 \cos(\pi x) v(x, y) d(x, y) \\
\Leftrightarrow \underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v}_{a(u,v):=} &= \underbrace{\int_\Omega \pi^2 \cos(\pi x) v(x, y) d(x, y)}_{l(v):=}.
\end{aligned}$$

Räume: $u \in W$, $v \in H^1(\Omega)$.

Da φ_1 und φ_2 sowie $\pi^2\cos(\pi x)$ nur von x abhängen, reicht es hin, das Integral in x-Richtung zu betrachten. Das zu lösende Gleichungssystem ist

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\alpha\varphi_1' + \beta\varphi_2')(x)\varphi_1'(x)dx &= \int_0^1 \pi^2\cos(\pi x)\varphi_1(x)dx,\\ \int_0^1 (\alpha\varphi_1' + \beta\varphi_2')(x)\varphi_2'(x)dx &= \int_0^1 \pi^2\cos(\pi x)\varphi_2(x)dx,\end{aligned}$$

also letztlich

$$\begin{aligned}\alpha\int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_1'(x)dx + \beta\int_0^1 \varphi_2'(x)\varphi_1'(x)dx &= \int_0^1 \pi^2\cos(\pi x)\varphi_1(x)dx,\\ \alpha\int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_2'(x)dx + \beta\int_0^1 \varphi_2'(x)\varphi_2'(x)dx &= \int_0^1 \pi^2\cos(\pi x)\varphi_2(x)dx,\end{aligned}$$

Man erhält (z.B. mittels eines CAS)

$$\begin{aligned}\alpha\cdot 1 + \beta\cdot\frac{1}{4} &= -2,\\ \alpha\cdot\frac{1}{4} + \beta\cdot\frac{9}{80} &= \frac{12}{\pi^2} - \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(*Beachte: Symmetrie, aber keine Diagonaldominanz!*) Also

$$\begin{aligned}\alpha &= 3 - \frac{60}{\pi^2},\\ \beta &= -20 + \frac{240}{\pi^2}.\end{aligned}$$

Lektion gelernt: Galerkinverfahren macht man besser auf dem Rechner. :-)

Aufgabe 3b.

Theorie: s.o.

Kompatibilitätsbedingung: $l(v) = 0$ auf $W^\perp = \text{Const}$

$$l(c) = \int_0^1 c\pi^2\cos(\pi x)dx = 0.$$

Aufgabe 3c.

Nicht eindeutig, da für eine Lösung u auch $u + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist.

Aufgrund der Randbedingungen versuchen wir's mit folgendem Ansatz (Fourier-Reihe aus der Eigenzerlegung des Laplaceoperators):

$$u(x,y) := \sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha_{m,n}\cos(m\pi x)\cos(n\pi x)$$

Also (*beachte, dass der konstante Term rausgeflogen ist*)

$$\begin{aligned}-\Delta u(x,y) &= \pi^2\cos(\pi x)\\ \left(\sum_{m,n\in\mathbb{N}^2\setminus\{0,0\}}^{\infty} \alpha_{m,n}(m^2\pi^2)(n^2\pi^2)\cos(m\pi x)\cos(n\pi x)\right) &= \pi^2\cos(\pi x)\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert *eine* Lösung.

$$\alpha_{m,n} = \begin{cases} C & (m,n) = (0,0), \\ 1 & (m,n) = (1,0), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

also $u(x) = \cos(\pi x) + C$. $u \in W \Rightarrow C = 0$. Also $u(x) = \cos(\pi x)$, und zwar eindeutig.

i. $u(1/4) - \tilde{u}(1/4) = \frac{8\pi^2\sqrt{2} + 7\pi^2 - 180}{16\pi^2} \approx 0.00474$

ii. $-\tilde{u}''(1/4) - \pi^2\tilde{u}(1/4) = \frac{-\pi^2 4\sqrt{2} - 60\pi^2 + 720}{2\pi^2} \approx -0.50324$

iii. $\tilde{u}'(0) = \frac{-12\pi^2 + 120}{\pi^2} \approx 0.1585$

Aufgabe 2.

Sei $v \in H_0^1(\Omega)$. Erinnerung: $H_0^1(\Omega) := \mathrm{clos}(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$. Setze $W_i := [a_i, b_i] \times \cdots \times [a_n, b_n]$
Betrachte für $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} |v(x_1, \dots, x_n)| &= \left| \underbrace{v(a_1, \dots, x_n)}_{=0} + \int_{a_1}^{x_1} 1 \cdot \partial_1 v(\xi_1, x_2, \dots, x_n) d\xi_1 \right| \\ &\leqslant \int_{a_1}^{x_1} |1 \cdot \partial_1 v(\xi_1, x_2, \dots, x_n)| d\xi_1 \\ &\leqslant \sqrt{\int_{a_1}^{x_1} 1^2 d\xi} \sqrt{\int_{a_1}^{x_1} |\partial_1 v(\xi_1, x_2, \dots, x_n)|^2 d\xi_1} \\ &\leqslant \sqrt{|b_1 - a_1|} \sqrt{\int_{a_1}^{x_1} |\partial_1 v(\xi_1, x_2, \dots, x_n)|^2 d\xi_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |v|^2 &= \int_W \mathbf{1}_\Omega |v|^2 \underset{v \in H_0^1}{=} \int_W |v|^2 \\ &\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{a_1}^{b_1} \int_{W_2} |v|^2 dy\, dx_1 \\ &\leqslant \int_{a_1}^{b_1} \int_{W_2} |b_1 - a_1| \int_{a_1}^{x_1} |\partial_1 v(\xi_1, x_2, \dots, x_n)|^2 d\xi_1 dy\, dx_1 \\ &\leqslant |b_1 - a_1| \int_{a_1}^{b_1} \int_{W_2} \int_{a_1}^{b_1} |\partial_1 v(\xi_1, x_2, \dots, x_n)|^2 d\xi_1 dy\, dx_1 \\ &= (b_1 - a_1)^2 \int_{W_1} |\partial_1 v(x)|^2 dx = (b_1 - a_1)^2 \|\partial_1 v\|_0^2. \end{aligned}$$

Analog

$$\|v\|_0^2 \leqslant (b_i - a_i)^2 \|\partial_i v\|_0^2.$$

Aufsummieren über $1, \dots, n$ ergibt

$$\begin{aligned} n\|v\|_0^2 &\leqslant \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 \|\partial_i v\|_0^2, \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 \sum_{j=1}^n \|\partial_j v\|_0^2 \\ &= \gamma \sum_{j=1}^n \int_{W_1} |\partial_j v(x)|^2 dx \\ &= \gamma \int_{W_1} \sum_{j=1}^n |\partial_j(x)|^2 dx = \gamma \|\nabla v\|_0^2. \end{aligned}$$

Sei nun $v \in H_0^1(\Omega)$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert wegen der Dichtheit von $C_0^\infty(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$ eine Funktion $\tilde{v} \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, so dass

$$\begin{aligned} \|v - \tilde{v}\|_0 \leqslant \|v - \tilde{v}\|_1 &< \varepsilon, \\ \left\|\nabla \tilde{v} - (Dv)^T\right\|_0 &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|v\|_0 &= \|v - \tilde{v} + \tilde{v}\|_0 \leqslant \|v - \tilde{v}\|_0 + \|\tilde{v}\|_0 \\ &\leqslant \varepsilon + \sqrt{\gamma}\|\nabla \tilde{v}\|_0 = \varepsilon + \sqrt{\gamma}\left\|\nabla \tilde{v} - (Dv)^T + (Dv)^T\right\|_0 \\ &\leqslant \varepsilon + \sqrt{\gamma}\varepsilon + \sqrt{\gamma}\left\|(Dv)^T\right\|_0. \end{aligned}$$

Da ε beliebig war, ergibt sich für $\varepsilon \to 0$ die Behauptung.

Schluss-Administrativa

Übungsblätter 8 austeilen.

Korrigierte Blätter austeilen.