Universität Karlsruhe
Institut für Angewandte Mathematik
Zirkel 2, Zi. 301
Prof. Dr. Vincent Heuveline

24.05.2005

6. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen

(SoSe 2005)

1. (3 Punkte)

   Wie lautet die schwache Formulierung der folgenden Randwertaufgaben?

   a) $-\Delta u + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c\, u = g$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$,

   b) $-\Delta u = 0$ in Ω, $u = 0$ auf Γ_1, $\frac{\partial u}{\partial n} = h_2$ auf Γ_2, $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = h_3$ auf Γ_3,

   wobei $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \partial\Omega$ und $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. Man gebe hinreichende Bedingungen an, unter denen das Lax-Milgram-Lemma ihre eindeutige Lösbarkeit in $H^1(\Omega)$ sichert.

2. (2 Punkte)

   Es sei $\Omega \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ konvex. Man beweise für $v \in H_0^1(\Omega)$ die Poincaré-Ungleichung

   $$\int_\Omega v^2 \leq \gamma \int_\Omega |\nabla v|^2 \quad \text{mit} \quad \gamma := \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2.$$

3. (5 Punkte)

   Gegeben ist die Randwertaufgabe

   $$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= \pi^2 \cos(\pi x) && \text{für alle } (x,y) \in \Omega := (0,1)^2, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) &= 0 && \text{für alle } (x,y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

   a) Man gebe eine schwache Formulierung der Aufgabe an und berechne die Galerkin-Approximation $\tilde{u}$ zur Basis

   $$\varphi_1(x,y) := x - 1/2, \qquad \varphi_2(x,y) := (x - 1/2)^3.$$

   b) Man zeige, dass die unter a) formulierte Aufgabe in

   $$W := \left\{ v \in H^1(\Omega) \colon \int_\Omega v = 0 \right\}$$

   eindeutig lösbar ist und $\tilde{u} \in W$ gilt.

c) Man zeige, dass die unter a) formulierte Aufgabe keine eindeutige Lösung $u \in C^2(\bar{\Omega})$ besitzt, ermittle eine Lösung $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap W$ und berechne für die Näherung $\tilde{u}$

   i. den Fehler für ein bestimmtes Argument (z.B. für $x=0.25$),

   ii. den Defekt in der Differentialgleichung (z.B. für $x=0.25$),

   iii. den Defekt in den Randbedingungen (z.B. für $x=0$).

Abgabe: Dienstag, 29.05.2005, in der Übung.