Universität Karlsruhe
Institut für Angewandte Mathematik
Zirkel 2, Zi. 301
Prof. Dr. Vincent Heuveline

31.05.2005

7. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen

(SoSe 2005)

1. (2 Punkte)

   Sei $K := \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \colon \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqslant 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}$ ein Dreieck mit den Kanten $\Gamma_1 := [a_1, a_2]$, $\Gamma_2 := [a_2, a_3]$, $\Gamma_3 := [a_3, a_1]$. Betrachte

   a) $M_1 := \{p \in \mathbb{P}_k \colon p|_{\Gamma_i} \in \mathbb{P}_{k-1}, i \in \{1, 2, 3\}\}$,

   b) $M_2 := \{p \in \mathbb{P}_k \colon \partial_n p|_{\Gamma_i} \in \mathbb{P}_{k-2}, i \in \{1, 2, 3\}\}$.

   Welche der beiden Mengen erzeugt eine affine Familie?

2. (3 Punkte)

   Sei (K, P_k, Σ) ein finites Element, wobei K ein Dreieck mit den Eckpunkten a_1, $a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$ sei. Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ betrachte man die Punktmenge

   $$L_k(K) := \left\{ x \in K \colon x = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i a_i, \ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \in 0, \frac{1}{k}, \cdots, \frac{k-1}{k}, 1, \ i \in \{1, 2, 3\} \right\}.$$

   Seien weiter die Freiheitsgrade $\gamma_x \in \Sigma$ gerade die Funktionswerte in den Punkten $x \in L_k(K)$. Dann gilt:

   Die Funktion $p \in P_k$ wird eindeutig durch die Bedingungen

   $$\gamma_x(p) = \alpha_x \text{ für } x \in L_k(K)$$

   bestimmt, wobei $\alpha_x \in \mathbb{R}$ für $x \in L_k(K)$ gegebene Konstanten sind (P_k-*Unisolvenz*).

   a) Man weise die Aussage für $k = 2$ nach.

   b) Man führe den Beweis für beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

3. (5 Punkte)

Es sei A ein formal selbstadjungierter, positiv semidefiniter, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung und (K, P_K, Σ) ein finites Element.

a) Man zeige, dass die Elementmatrix E_K zu A symmetrisch und positiv ist.

b) Sei zusätzlich A isotrop. Man zeige, dass sich E_K bei Verschiebung oder Drehung von K nicht ändert.

c) Der Operator A sei jetzt isotrop und homogen vom Grade q. Außerdem sei das Element K' dem Element K geometrisch ähnlich. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den zugehörigen Elementmatrizen?

d) Man betrachte die Teilaufgaben b) und c) für den Laplaceoperator und den identischen Operator in $\mathbb{R}^N$.

Bemerkung: Ein Operator A heißt *homogen vom Grade* q, falls mit der Ähnlichkeitstransformation $x = \lambda t$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gilt:

$$A_x\, u(x) = \lambda^q A_t\, u(x),$$

wobei A_t der formal von $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$- auf $t = (t_1, t_2, ..., t_N)$-Koordinaten umgeschriebene Operator $A = A_x$ ist.

Abgabe: Dienstag, 07.06.2005, in der Übung.