Universität Karlsruhe 07.06.2005
Institut für Angewandte Mathematik
Zirkel 2, Zi. 301
Prof. Dr. Vincent Heuveline

8. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen

(SoSe 2005)

1. (4 Punkte)

   Betrachtet wird ein finites Element (K, Π, Σ). Es sei K ein Dreieck mit Eckpunkten $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$. Für die Definition eines finiten Elementes sollen folgende Freiheitsgrade verwendet werden:

   – in den Ecken: der Funktionswert und die Ableitungen in Richtung der von dem jeweiligen Eckpunkt ausgehenden Seiten,

   – im Schwerpunkt: der Funktionswert.

   a) Man weise die $\mathbb{P}_3$-Unisolvenz dieser Menge Σ von Freiheitsgraden nach.

   b) Man konstruiere eine Basis von Σ für ein gleichseitiges Dreieck K.

2. (2 Punkte)

   Welchen Differenzenstern erzeugt die FEM, die die partielle Differentialgleichung $-\Delta u + c\,u = f$ auf einem achsenparallelen Rechtecksnetz in $\Omega := (0,1)^2$ mit Hilfe von finiten Elementen $(\hat{K}, \hat{\Pi}, \hat{\Sigma})$ der Form

   $$\hat{K} := [-1,1]^2, \quad \hat{\Pi} := \mathbb{Q}_1, \quad \hat{\Sigma} := \left\{\hat{\sigma}_i \colon \hat{\Pi} \to \mathbb{R} \colon \hat{\sigma}_i(u) = u(\pm 1, \pm 1), i \in \{1, \dots, 4\}\right\}$$

   diskretisiert?

3. (3 Punke)

   Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Die elliptische Differentialgleichung

   $$\nabla \cdot (a(x)\,\nabla u(x)) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega$$

   mit passenden Randbedingungen werde mit linearen Dreieckselementen gelöst. Man zeige, dass sich die selbe Lösung ergibt, wenn man die Koeffizientenfunktion a durch eine auf jedem Dreieck K konstante Funktion $a_\Delta \colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $a|_K = \alpha_K \in \mathbb{R}$ ersetzt. Wie sind die Konstanten α_K zu berechnen?

4. (3 Punkte)

Sei $(\hat{K}, \hat{\Pi}, \hat{\Sigma})$ ein finites Element mit $\hat{K} := [-1,1]^2$ und

$$\hat{\Sigma} := \{\hat{\sigma}_i \colon \hat{\Pi} \to \mathbb{R} \colon \hat{\sigma}_i(u) = u(\hat{x}_i), \hat{x}_i \in \hat{Z}\},$$

wobei $\hat{Z} := \{-1,0,1\}^2 \setminus (0,0)$. Lässt man bei den biquadratischen Elementen den Term x^2y^2 weg (d.h. $\hat{\Pi} := \mathbb{Q}_2 \setminus [x^2y^2]$), so erhält man ein quadratisches Element der *Serendipity-Klasse*. Man gebe für das so erzeugte finite Element geeignete Basisfunktionen $\hat{p}_i \in \hat{\Pi}$ an, so dass $\hat{\sigma}_i(\hat{p}_j) = \delta_{i,j}$ für $i, j \in \{1, ..., 8\}$.

Abgabe: Dienstag, 14.06.2005, in der Übung.