Universität Karlsruhe
Institut für Angewandte Mathematik
Zirkel 2, Zi. 301
Prof. Dr. Vincent Heuveline

14.06.2005

9. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen

(SoSe 2005)

1. (4 Punkte)

   Seien Ω_1, Ω_2 zwei nichtleere, offene, beschränkte und disjunkte Teilmengen von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit stückweise glattem Rand, $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ und $G := \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$. Die Vervollständigung von $C^\infty(\Omega)^d$ bzgl. der Norm

   $$\|v\| := \left\{ \|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla \cdot v\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2}$$

   wird als $H(\mathrm{div}, \Omega)$ bezeichnet. Offensichtlich ist $H^1(\Omega)^d \subset H(\mathrm{div}, \Omega) \subset L_2(\Omega)^d$. Sei $S_h \subset L_2(\Omega)^d$ eine Menge von Funktionen, so dass für $s \in S_h$ die Einschränkungen $s|_{\Omega_1}$ und $s|_{\Omega_2}$ Polynome sind. Man zeige, dass $S_h \subset H(\mathrm{div}, \Omega)$ genau dann, wenn die Komponente $v \cdot n$ in Richtung der Normalen n für jedes $v \in S_h$ an den Elementgrenzen stetig ist.

2. (4 Punkte)

   Die Menge der kubischen Polynome, deren Restriktion auf die Kanten eines Dreiecks quadratische Funktionen sind, bilden einen siebendimensionalen Raum. Man gebe eine Basis in Bezug auf das Einheitsdreieck an. Das Ergebnis kann mit dem Raum $\mathbb{P}_2 \oplus \mathbb{B}_3$ identifiziert werden. Wie ist $\mathbb{B}_3$ definiert und welche Eigenschaften besitzen die Funktionen in $\mathbb{B}_3$?

3. (2 Punkte)

   Man zeige, dass bei einer Triangulierung eines einfach zusammenhängenden Gebietes die Anzahl der Dreiecke plus die Anzahl der Knoten minus die Anzahl der Kanten stets 1 beträgt. Warum gilt das nicht für mehrfach zusammenhängende Gebiete?

<u>**Abgabe:**</u> Dienstag, 21.06.2005, in der Übung.