6. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen
+ Selbsttest-Auflösung

Aufgabe 26: Untersuchen Sie die Folgen, deren Glieder unten für $n \in \mathbb{N}$ angegeben sind, auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz bzw. Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz geeigneter Teilfolgen. Der Grenzwert oder die Häufungspunkte müssen nicht angegeben werden.

(a) $a_n = \dfrac{1+6n+2n^2}{(n+3)n}$, (c) $c_n = \dfrac{(-2)^{-n}+1}{1+2n} - 1 + \dfrac{2n}{1+2n}$,

(b) $b_n = 6 - \dfrac{6+n^2}{n}$, (d) $d_n = \dfrac{1+2^n}{1+2^n+(-2)^n}$.

Lösung 26: Man hat

$$a_n = \frac{1+6n+2n^2}{(n+3)n} = \frac{1}{n(n+3)} + 2.$$

Daraus folgt die beidseitige Abschätzung

$$2 \leq a_n \leq 3 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

also ist (a_n) beschränkt. Ferner gilt

$$a_{n+1} - a_n = 2 + \frac{1}{(n+1)(n+3)} - 2 - \frac{1}{n(n+3)} = \frac{n^2+3n-n^2-5n-4}{n(n+1)(n+3)(n+4)} = \frac{-2n-4}{n(n+1)(n+3)(n+4)} < 0,$$

also ist (a_n) streng monoton fallend. Man schließt daraus, dass (a_n) konvergent ist.
Für (b_n) gilt

$$b_n = 6 - \frac{6+n^2}{n} = 6 - n - \frac{6}{n} = n + \frac{1}{n+1} < 6 - n,$$

also ist (b_n) nach oben durch 6 beschränkt, nach unten unbeschränkt. Insbesondere ist (b_n) divergent. Ferner gilt

$$b_{n+1} - b_n = 6 - n - 1 - \frac{6}{n+1} - 6 + n + \frac{6}{n} = -\frac{n^2+n-6}{n(n+1)} = -\frac{(n-2)(n+3)}{n(n+1)},$$

also ist nach Betrachtung der Faktoren $b_{n+1} - b_n > 0$ nur für $n = 1$, sowie $b_{n+1} - b_n = 0$ für $n = 2$ und $b_{n+1} - b_n < 0$ für $n > 2$: Damit ist die Folge $(b_n)_n$ für $n \in \mathbb{N}$ nicht monoton, für $n > 1$ aber monoton fallend, für $n > 2$ sogar streng monoton fallend.
Es ist

$$c_n = \frac{1}{(-2)^n} \cdot \frac{1}{1+2n} = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1+2n} > 0, & n \text{ gerade}, \\ -\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1+2n} < 0, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

also ist (c_n) alternierend, nicht monoton. Ferner gilt

$$\begin{cases} c_n < 1, & n \text{ gerade}, \\ c_n > -1, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

insbesondere $|c_n| < 1$, d.h. (c_n) ist beschränkt. Beide Teilfolgen (c_{2k}) und (c_{2k-1}) sind ausserdem streng monoton, denn

$$\frac{c_{n+2}}{c_n} = \frac{(-2)^n \cdot (1+2n)}{(-2)^{n+2} \cdot (5+2n)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1+2n}{5+2n} < \frac{1}{4} \cdot \frac{1+2n}{1+2n} = \frac{1}{4}$$

und damit ist (c_{2k}) streng monoton fallend und (c_{2k+1}) streng monoton steigend. Damit konvergieren beide Teilfolgen mit dem Monotoniekriterium. Betrachtet man die Folge noch genauer, so sieht man die Abschätzung

$$|c_n| = \left| \frac{1}{(-2)^n} \cdot \frac{1}{1+2n} \right| = \left| \frac{1}{(-2)^n} \right| \cdot \left| \frac{1}{1+2n} \right| < \frac{1}{2^n}$$

und da (2^n) eine Nullfolge ist, konvergiert $(c_n)_n$ mit beiden Teilfolgen gemeinsam gegen 0.
Wie zuvor können wir auch $(d_n)_n$ in zwei Teilfolgen zerlegen:

$$d_n = \frac{1+2^n}{1+2^n+(-2)^n} = \begin{cases} \frac{1+2^n}{1+2^{n+1}} & n \text{ gerade}, \\ 1+2^n & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wir untersuchen die Monotonie für gerade n:

$$\begin{aligned} d_{n+2} - d_n &= \frac{1+2^{n+2}}{1+2^{n+3}} - \frac{1+2^n}{1+2^{n+1}} = \frac{8 \cdot 2^{2n} + 4 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^n + 1 - 16 \cdot 2^{2n} - 8 \cdot 2^n - 2^n - 1}{(1+2^{n+3})(1+2^{n+1})} \\ &= \frac{-8 \cdot 2^{2n} - 3 \cdot 2^n}{(1+2^{n+3})(1+2^{n+1})} < 0 \end{aligned}$$

Die Teilfolge (d_{2k}) ist also streng monoton fallend und deswegen nach oben durch $d_2 \geq d_{2k}$ beschränkt. Da aber Zähler und Nenner immer positiv sind, ist auch $d_{2k} > 0$ und somit ist sie auch nach unten beschränkt und deswegen nach dem Monotoniekriterium konvergent.
Für ungerade n erhalten wir $d_{n+2} - d_n = 1 + 2^{n+2} - 1 - 2^n = 4 \cdot 2^n - 2^n = 3 \cdot 2^n > 0$, dass diese Teilfolge also streng monoton steigend ist, und auch immer positiv ist $d_{2k-1} > 0$, doch hat 2^n keine obere Schranke und damit ist diese Teilfolge divergent.
Damit hat $(d_n)_n$ insgesamt zwar nur einen Häufungspunkt, ist aber dennoch nicht konvergent, ist also divergent.

Aufgabe 27: Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_n$ mit

$$\text{(a) } a_n = \sqrt{n^2+n} - n \quad , \qquad \text{(b) } a_n = \sqrt[n]{4 + \frac{n-1}{n+1}} \quad , \qquad \text{(c) } a_n = \frac{n^4-2}{n^2+4} + \frac{n^3(3-n^2)}{n^3+1}.$$

Lösung 27:

(a) Es ist

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}.$$

Ferner gilt für $b_n = 1/a_n$

$$b_n = \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n} = \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} + 1 = \sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1 \longrightarrow 2 \quad (n \to \infty).$$

Man hat also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{1}{2}$.

(b) Wir schätzen ab

$$\sqrt[n]{5} \geq \sqrt[n]{4 + \frac{n-1}{n+1}} = a_n > 1.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} = 1$ ist. Also ist a_n zwischen zwei Folgen $b_n = \sqrt[n]{5}$ und $c_n = 1$ eingeschlossen, die den gleichen Limes haben. Nach dem Einschließungskriterium gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^4-2}{n^2+4} - \frac{n^3(n^2-3)}{n^3+1} = \frac{n^2\left(n^2+4\right) - 4n^2 - 2}{n^2+4} - \frac{\left(n^3+1\right)\left(n^2-3\right) - n^2 + 3}{n^3+1} \\ &= n^2 - \frac{4n^2+2}{n^2+4} - n^2 + 3 + \frac{n^2-3}{n^3+1} = 3 - \frac{4+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{3}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}. \end{aligned}$$

Nach den Rechenregeln gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3 - \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)} + \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = 3 - \frac{4}{1} + \frac{0}{1} = -1.$$

Aufgabe 28: Gegeben sei die rekursiv definierte Folge

$$a_1 = b\,, \qquad a_{k+1} = \frac{|a_k|}{2a_k - 1}\,, \; k \in \mathbb{N}$$

und wir betrachten die zwei Startwerte $b = -\frac{1}{4}$, sowie $b = \frac{1}{4}$.

(a) Unter Annahme der Konvergenz, gegen welche Grenzwerte kann die Folge dann konvergieren?

(b) Für welche der beiden Startwerte ist die Folge monoton?

(c) Für welche der beiden Startwerte ist die Folge beschränkt?

(d) Begründen Sie, ob die Folgen konvergieren und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte.

Lösung 28:

(a) Wenn die Folge konvergiert, so existiert ein Grenzwert a und man kann den Limes auf die Rekursionsformel anwenden:

$$\lim_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim_{k\to\infty} a_k = a = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{2a_k-1} = \frac{|a|}{2a-1}$$

Also müssen mögliche Grenzwerte die Formel $2a^2 - a = |a|$ erfüllen. Wir haben zwei Fälle: Für $a \leq 0$ ist $2a^2 - a = -a$, also $a = 0$, und für $a > 0$ erhalten wir $2a^2 - a = a$, also $2a(a-1) = 0$ und somit $a = 1$ als zweite Lösung. Als mögliche Grenzwerte kommen nur 0 und 1 in Betracht.

(b) Ist zunächst $b < 0$, so ist $a_1 = b < 0$ und mit vollständiger Induktion $a_{k+1} = \frac{|a_k|}{2a_k-1} < 0$. Für die Differenz $a_{k+1} - a_k$ erhalten wir mit $a_k < 0$:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{|a_k|}{2a_k-1} - a_k = \frac{-a_k - 2a_k^2 + a_k}{2a_k-1} = -2\frac{a_k^2}{2a_k-1} > 0$$

Also ist die Folge für $b = -\frac{1}{4}$ streng monoton steigend.
Für $a_1 = b = \frac{1}{4}$ erhalten wir $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{4}$, sie ist also nicht monoton.

(c) Da für $b < 0$ die Folgenglieder wie gezeigt negativ sind, gleichzeitig aber streng monoton wachsen, ist $b \leq a_k < 0$ und sicher $|a_k| \leq b$ erfüllt und somit ist die Folge für $b = -\frac{1}{4}$ beschränkt.

Wenn $b = \frac{1}{4}$ gilt, so ist $a_2 = -\frac{1}{2}$ und somit alle folgenden Folgenglieder negativ und ab a_2 wachsend, also gilt hier $-\frac{1}{2} \leq a_k \leq \frac{1}{4}$, also gesamt $|a_k| \leq \frac{1}{2}$ und sie ist beschränkt.

(d) Für $b = -\frac{1}{4}$ ist das Monotonie-Kriterium erfüllt, und somit konvergiert die Folge dann. Da hier $a_k < 0$, kann der Grenzwert nur $a = 0$ lauten.

Für $b = \frac{1}{4}$ ist die Folge ab dem zweiten Folgenglied monoton, somit konvergiert der hintere Folgenteil nach dem Monotonie-Kriterium, und damit auch die gesamte Folge.

Man kann auch argumentieren, dass die Folge mit dem Startwert $\frac{1}{4}$ beim zweiten Folgenglied $-\frac{1}{4}$ erreicht und ab dort mit der ersten Folge übereinstimmt, die konvergiert.

Aufgabe 29: Numerisch kann die Gleichung

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{1}{5}$$

für $0 \leq x \leq 1$ durch Iteration gelöst werden. Man verwende hierzu die Folge

$$x_0 = 0, \qquad x_n = \frac{x_{n-1}^3}{4} + \frac{1}{5}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(x_n)_n$ konvergiert und schätzen Sie den Fehler nach k Schritten ab.
Hinweis: Bestimmen Sie $C \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$$|x_{n+1} - x_n| \leq C\,|x_n - x_{n-1}|.$$

Lösung 29: Zunächst gilt: Ist $0 \leq x_n \leq 1$, so ist $0 \leq x_{n+1} \leq 1/2$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Durch Induktion folgt: Die Folge ist beschränkt. Zentral ist ferner die Gleichung

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^3}{4} - \frac{x_{n-1}^3}{4} = \frac{1}{4}(x_n - x_{n-1})(x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Jetzt folgern wir: ist $x_n - x_{n-1} \geq 0$, so auch $x_{n+1} - x_n$, denn $x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2 \geq 0$ für $0 \leq x_{n-1}, x_n \leq 1/2$. Mittels Induktion folgt: Die Folge ist beschränkt und monoton wachsend, also konvergent. Setze $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
Aus der Gleichung oben folgt außerdem:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{4}|x_n - x_{n-1}|(x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2) \leq \frac{3}{16}|x_n - x_{n-1}|.$$

Induktiv folgt: $|x_{n+1} - x_n| \leq (3/16)^n |x_1 - x_0|$. Wähle nun $k \in \mathbb{N}$ fest und betrachte:

$$|x - x_k| = \lim_{n\to\infty} |x_{k+n} - x_k| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} |x_{k+j+1} - x_{k+j}| \leq |x_{k+1} - x_k| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{3}{16}\right)^j = |x_{k+1} - x_k| \frac{1}{1 - \frac{3}{16}}.$$

Eine weitere Abschätzung liefert $|x - x_k| \leq \dfrac{3}{13}\left(\dfrac{3}{16}\right)^{k-1} |x_1 - x_0|$.

Aufgabe 30: Für $c \in \mathbb{R}$ sei die Folge $(z_n)_n$ definiert durch

$$z_0 = 0\,, \quad z_{n+1} = \frac{n^2 z_n^2 + c}{n+1}\,, \; n \in \mathbb{N}.$$

(a) Stellen Sie für $c = -2$ eine Vermutung für eine geschlossene Form von $(z_n)_n$ ab $n \geq 2$ auf, beweisen Sie diese und die Konvergenz der Folge. Was ist der Grenzwert?

(b) Zeigen Sie, dass die Folge für $c = 1$ monoton wächst, sowie Divergenz durch Vergleich mit $v_n = (4/3)^{n-2}$.

Lösung 30:

(a) Wir berechnen die ersten Werte:

$$z_0 = 0,\ z_1 = -2,\ z_2 = 1,\ z_3 = \frac{2}{3},\ z_4 = \frac{2}{4},\ z_5 = \frac{2}{5},\ \ldots$$

Kürzt man die Brüche nicht, so liegt die Vermutung nahe, dass $z_n = \frac{2}{n}$ gilt für $n \geq 2$. Wir zeigen dies mit vollständiger Induktion ab $n = 2$:

$n = 2$: Wir wissen, dass $z_2 = 1$, zu zeigen ist, dass $z_2 = \frac{2}{2}$. Das ist offensichtlich erfüllt.

$n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und für dieses n ist $z_n = \frac{2}{n}$ $(*)$. Zu zeigen ist, dass $z_{n+1} = \frac{2}{n+1}$.

$$z_{n+1} = \frac{n^2 z_n^2 - 2}{n+1} \overset{(*)}{=} \frac{n^2\left(\frac{2}{n}\right)^2 - 2}{n+1} = \frac{4-2}{n+1} = \frac{2}{n+1}$$

Damit haben wir die geschlossene Form bewiesen und können nun den Grenzwert berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq 2}} \frac{2}{n} = 0$$

Es existiert ein Grenzwert, also ist die Folge konvergent, und zwar gegen 0.

(b) Schauen wir uns wieder ein paar Werte an:

$$z_0 = 0,\ z_1 = 1,\ z_2 = 1,\ z_3 = \frac{5}{3},\ z_4 = \frac{13}{2},\ \ldots$$

Alle Werte sind positiv, und das ist leicht einsehbar, da in der Rekursionsformel

$$z_{n+1} = \frac{n^2 z_n^2 + 1}{n+1}$$

nur positive Terme erscheinen. Für die Monotonie schauen wir uns das Verhältnis $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ für $n \geq 2$ an, die Monotonie den ersten Schritten haben wir schon nachgerechnet.

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n^2 z_n + \frac{1}{z_n}}{n+1} = \underbrace{\frac{n^2}{n+1}}_{>(n-1)\text{ für } n\geq 2} \quad z_n + \underbrace{\frac{1}{z_n}(n+1)}_{>0}$$

Setzen wir voraus, dass $z_n \geq 1$ für $n \geq 2$, so ist schon der erste Summand größer 1, da $n^2/(n+1) = n - 1 + \frac{1}{n+1}$ und damit ist die Folge monoton wachsend. Zu zeigen ist also mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 2$ gilt, dass $z_n \geq 1$ und $\frac{z_{n+1}}{z_n} \geq 1$ ist:

$n = 2$: Gegeben ist $n = 2$ und zu zeigen ist $z_2 \geq 1$ und $z_3/z_2 \geq 1$. Ausgerechnet haben wir $z_2 = 1 \geq 1$ und $z_3/z_2 = 5/3 \geq 1$, also ist die Behauptung erfüllt.

$(n-1) \to n$: Gegeben ist $z_{n-1} \geq 1$ und $z_n/z_{n-1} \geq 1$. Zu zeigen ist: $z_n \geq 1$ und $z_{n+1}/z_n \geq 1$.
Da $z_n/z_{n-1} \geq 1$, ist $z_n \geq z_{n-1}$, denn $z_{n-1} \geq 1 > 0$. Damit ist aber auch $z_n \geq z_{n-1} \geq 1$, also $z_n \geq 1$. Den Bruch schauen wir uns wie oben an und erhalten die zweite Aussage:

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n^2 z_n + \frac{1}{z_n}}{n+1} = \underbrace{\frac{n^2}{n+1}}_{>(n-1)\text{ für } n\geq 2} \quad \underbrace{z_n}_{\geq 1} + \underbrace{\frac{1}{z_n}(n+1)}_{>0} \geq 1 \cdot 1 + 0 = 1$$

Vergleichen wir nun mit der Folge $(v_n)_n$ so ist $v_0 = \frac{9}{16},\ v_1 = \frac{3}{4},\ v_2 = 1,\ v_3 = \frac{4}{3},\ \ldots$ und somit $v_1 \leq z_1$ und $v_2 \leq z_2$. Da für $n \geq 2$ gilt, dass $n^2/(n+1) = n - 1 + \frac{1}{n+1} \geq \frac{4}{3}$ (für $n = 2$ haben wir Gleichheit, ab $n = 3$ ist $n - 1 \geq 2$) ist

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \underbrace{\frac{n^2}{n+1}}_{\geq \frac{4}{3}\cdot 1} z_n + \underbrace{\frac{1}{z_n}(n+1)}_{\geq 0} \geq \frac{4}{3}\,.$$

Somit steigt $(z_n)_n$ mindestens so stark wie $(v_n)_n$, denn $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4}{3}$. Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, dass $v_n \leq z_n$ und somit ist $(v_n)_n$ eine divergente Minorante und damit auch $(z_n)_n$ divergent.

Diese Folge zeigt für unterschiedliche Parameter c sehr unterschiedliches Verhalten und es wird noch vielfältiger, wenn man $c = x + iy$ als komplexe Zahl zulässt. Zeichnet man jeden Punkt in der komplexen Ebene schwarz, wo die zugehörige Folge konvergiert, so erhält man das folgende Bild:

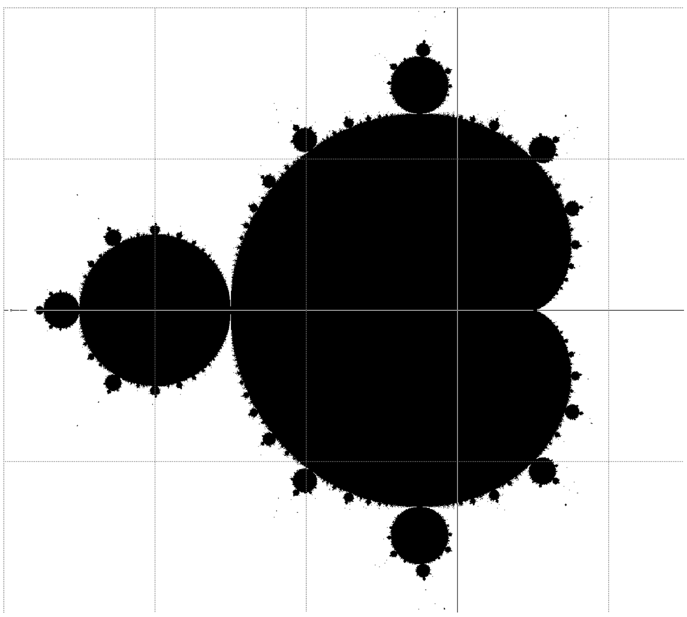

Abbildung: Das Apfelmännchen in der komplexen Ebene in $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}] \times [-1, 1]$

Die sogenannte Mandelbrotmenge der Parameter $c \in \mathbb{C}$, unter der $(z_n)_n$ konvergiert, ergibt in die komplexen Ebene gezeichnet das Apfelmännchen. Die durchgezogenen Linien bezeichnen die reelle und die imaginäre Achse, die gestrichelten Linien haben den Abstand $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}i$. Bekannter ist die Folge $a_n = nz_n = a_{n-1}^2 + c$, $a_0 = 0$, hier wird dann statt der Konvergenz die Beschränktheit betrachtet. Die Farben in den bekannten Bildern bezeichnen die Geschwindigkeit der Divergenz, ähnlich wie oben die $\frac{4}{3}$. Solche Bilder und eine Software zum Erstellen dieser, finden Sie z.B. unter `http://xaos.sf.net/`.

Auflösung zum Selbsttest:

$a_n =$	1	n	$1/n$	$(-1)^n$	$(-1)^n n$	i^n/n	$(-1)^n n + n$	$a_{n-1}/2$, $a_0 = 1$
konstant	$\surd$							
beschränkt	$\surd$		$\surd$	$\surd$		$\surd$		$\surd$
unbeschränkt		$\surd$			$\surd$		$\surd$	
konvergent	$\surd$		$\surd$			$\surd$		$\surd$
divergent		$\surd$		$\surd$	$\surd$		$\surd$	
uneigentlich konvergent		$\surd$						
monoton fallend	$\surd$		$\surd$			///		$\surd$
streng monoton fallend			$\surd$			///		$\surd$
monoton wachsend	$\surd$	$\surd$				///		
streng monoton wachsend		$\surd$				///		
alternierend				$\surd$	$\surd$	///		
Häufungspunkt(e)	1	'∞'	0	-1, 1	'$-\infty$', '∞'	0	0, '∞'	0
Grenzwert	1	'∞'	0			0		0

- $a_n = 1$: Folge ist konstant, beschränkt $1 \leq a_n \leq 1$, konvergent gegen $a = 1$, dies ist damit der einzige HP, und wegen $a_n \leq a_n$ und $a_n \geq a_n$ monton wachsend und fallend.
- $a_n = n$: Jede etwaige obere Schranke C wird für $n > C$ überschritten, also ist sie unbeschränkt und somit nicht konvergent und sicher nicht konstant. Sie steigt streng monoton, da $a_{n+1} - a_n = 1 > 0$ und hat den uneigentlichen Grenzwert ∞. Dies kann man auch als uneigentlichen Häufungspunkt ansehen, obwohl das nicht sehr gängig ist.
- $a_n = 1/n$: Die Folge ist nach oben durch 1 beschränkt und konvergiert gegen 0. Sie ist (streng) monoton fallend, denn $a_{n+1} - a_n = -1/(n^2 + n) < 0$. Der Grenzwert 0 der einzige Häufungspunkt.
- $a_n = (-1)^n$: Es gilt die Abschätzung $-1 \leq a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge ist beschränkt. Weiter gilt $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, also ist die Folge alternierend. $(a_n)_n$ lässt sich in zwei Folgen $(g_n)_n$ und $(u_n)_n$ aufspalten mit $g_n = 1$ und $u_n = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. 1 und -1 sind zwei Häufungspunkte von $(a_n)_n$, daher besitzt diese Folge keinen Grenzwert, ist also divergent.
- $a_n = (-1)^n n$: Die Folge ist unbeschränkt, denn für eine beliebige Schranke C können wir ein $n \in \mathbb{N}$ angeben, sodass $a_{2n} = 2n > C$ gilt. die Folge ist divergent, denn $|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1}(n+1) - (1-)^n n| = |(-1)^n((-n-1) - n)| = |(-1)^n||-2n-1| = 2n+1$. Es kann also keinen Grenzwert geben. Wegen $a_{n+1} \cdot a_n = (-1)^{2n+1}(n^2+n) = -(n^2+n) < 0$ ist die Folge alternierend. Die uneigentliche Häufungspunkte sind $-\infty$ und ∞.
- $a_n = i^n/n$: Man betrachte den Betrag der Folge: $|i^n/n| = 1/n$. Die Beschränktheit, die Konvergenz der Häufungspunkt und der Grenzwert kann man dann analog zur obigen Folge mit den Folgegliedern $a_n = 1/n$ zeigen. Beachte, dass es in $\mathbb{C}$ (im Gegensatz zu $\mathbb{R}$) keine Relationen wie $\leq$ oder $\geq$ gibt! Bei komplexwertigen Folgen können wir also nicht von Monotonie sprechen.
- $a_n = (-1)^n n + n$: Die Unbeschränktheit zeigt man analog wie bei der Folge mit $a_n = (-1)^n n$. Die Divergenz erkennt man an $|a_{n+1} - a_n| = 2n$. Für ungerade n ist $a_n = 0$; für gerade n ist $a_n = 2n$. Wir haben also die Null als Häufungspunkt (und '∞' als den zweiten, uneigentlichen Häufungspunkt).
- $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n/2$: Die expl. Darstellung der Folge ist $a_n = 1/2^n$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Diese ist beschränkt, denn $0 \leq a_n \leq 1$. Sie konvergiert gegen 0, ist (strikt) monoton fallend, denn $a_{n+1} - a_n = 1/(2^{n+1}) - 1/(2^n) = (1-2)/(2^{n+1}) = -1/(2^{n+1}) < 0$. Der Grenzwert ist auch der einzige Häufungspunkt.