Aufgabe 1: a) $f^{(0)}(x)=\sin 3x,\ f'(x)=3\cos 3x=\sin(3x+\frac{\pi}{2}),\ f''(x)=3^2\sin(3x+2\cdot\frac{\pi}{2})....,$
$f^{(k)}(x)=3^k\sin(3x+k\frac{\pi}{2}),\ f(x)=\sin 3x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{3^k\sin k\frac{\pi}{2}}{k!}x^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k x^{2k+1}$
b) $f(x)=\cosh\frac{x}{2},\ f^{(2k+1)}(x)=\frac{1}{2^{2k+1}}\sinh\frac{x}{2},\ f^{(2k)}(x)=\frac{1}{2^k}\cosh\frac{x}{2};\ f^{(2k+1)}(0)=0$
$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2^{2k}(2k)!}$
c) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}},\ f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1},\ f''(x)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(1+x)^{\frac{1}{2}-2},...,$
$f^{(k)}(x)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-k+1)(1+x)^{\frac{1}{2}-k}=k!\binom{\frac{1}{2}}{k}(1+x)^{\frac{1}{2}-k},\ f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k.$
d) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x),\ f'(x)=(1+x)^{-1}+(1-x)^{-1},\ f''(x)=-(1+x)^{-2}+(1-x)^{-2},$
$f'''(x)=(-1)^2 2!(1+x)^{-3}+2!(1-x)^{-3},...\ f^k(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}+(k-1)!(1-x)^{-k},$
$f^{(2l)}(0)=0,\ f^{(2l+1)}(0)=2(2l)!\ f(x)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{f(2l+1)(0)}{(2l+1)!}x^{2l+1}=2\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{x^{2l+1}}{2l+1}$
Konvergenz: a) $x\in\mathbb{R}$, b) $x\in\mathbb{R}$, c) $|x|<1$, d) $|x|<1$

Aufgabe 2: $f(x)=x^{10}-3x^6+x^2+2,\quad f(1)=1$
$f'(x)=10x^9-18x^5+28,\quad f'(1)=-6$
$f''(x)=90x^8-90x^4+2,\quad f''(1)=2$
$p_2(x)=1-6(x-1)+2(x-1)^2;\quad f(x)=1-6(x-1)+2(x-1)^2+R_2(x,1)$
$R_2(x,1)=\frac{(x-1)^3}{6}f'''(\xi),\ f'''(\xi)=720\xi^7-360\xi^3=360\xi^3(2\xi^4-1)$. Aus $f^4(x)=360x^2(14x^4-3)>0$ für $x\geq 1$ folgt: f''' ist dort monoton steigend und $R_2(x,1)\leq\frac{(1{,}3-1)^3}{6}\ f'''(1{,}3)=\frac{0{,}3^3}{6}\ f'''(1{,}3)\approx\frac{0{,}027}{6}\cdot 1468$ $\approx 6{,}61,\quad f(1{,}3)\approx 3,\quad p_2(1{,}3)\approx 0{,}62$

Aufgabe 3: $f(x)=\arcsin x, f(0)=0; f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, f'(0)=1; f''(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, f''(0)=0; f^{(3)}(x)=$ $\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$
$f^{(3)}(0)=1; f^{(4)}(x)=\frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$. Somit ist $p_3(x)=0+x+0+\frac{1}{3!}x^3=x+\frac{1}{6}x^3$. Restgliedabschätzung:
a) Finde Schranke für $|f^{(4)}(\xi)|$, ξ zwischen x und $x_0=0$, d.h. $|\xi|<x\leq\frac{1}{2}$. Es gilt
$|f^{(4)}(\xi)\leq\frac{9|\xi|+6|\xi|^3}{(1-\xi^2)^{\frac{7}{2}}}\leq\frac{\frac{9}{2}+\frac{6}{8}}{(\frac{3}{4})^{\frac{7}{2}}}=\frac{\frac{3}{4}(6+1)2^7}{3^{\frac{7}{2}}}=\frac{7\cdot 2^5}{3^{\frac{5}{2}}}\approx 14{,}4$. Somit $|R_3(x,\xi)|\leq\frac{7\cdot 2^5}{4!3^{\frac{5}{2}}}|x|^4$.
b) Wegen $|x|\leq\frac{1}{2}$ folgt aus a) $|R_3(x,\xi)|\leq\frac{7\cdot 2^5}{4!3^{\frac{5}{2}}}\frac{1}{2^4}=\frac{7}{3^{\frac{7}{2}}2^2}\approx 0{,}037$.

Aufgabe 4: Aus dem Additionstheorem $\cos^2 z-\sin^2 z=\cos 2z$ folgt
$\cos^2 z=\frac{1}{2}(1+\cos 2z)$. Damit ergibt sich

$$f(x)=x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x^3\right)=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x^3)^{2n}=x-x^7+\frac{1}{3}x^{13}+\mathcal{O}(x^{19})$$

Also ist $p_{13}(x)=x-x^7+\frac{1}{3}x^{13}$ das Taylorpolynom der Ordnung 13 (sogar der Ordnung 18) von f um $x_0=0$. Wenn diese Funktion 13-mal abgeleitet wird, ergibt sich $f^{(13)}(x)=\frac{1}{3}13!+\mathcal{O}(x^6)$, also ist $f^{(13)}(0)=\frac{1}{3}13!$.

Aufgabe 5: Dies zeigt man einfach durch Ableiten