Aufgabe 46: a) Hier nutzen wir die Linearität aus:

$$\underline{L(5e^{2t}-6)(s) = 5L(e^{2t})(s) - 6L(1)(s) = 5\frac{1}{s-2} - 6\frac{1}{s}}.$$

b) Hier wird $f(t) = \sin(2t)$ mit e^{-6t} multipliziert, also gedmpft. Der Dämpfungssatz besagt, dass wir zunchst die Laplace-Transformierte von $\sin(2t)$ berechnen und danach eine Verschiebung um -6 im Argument vornehmen mssen. Mit $L(\sin(\omega t))(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ergeben

$$\underline{L(e^{-6t}\sin(2t))(s) = L(\sin(2t))(s-(-6)) = \frac{2}{(s+6)^2+4}}.$$

c) Wir gehen von der Laplace-Transformierten des Cosinus $L(\cos(t))(s) = \frac{s}{s^2+1}$ aus und untersuchen den Einfluss der Verschiebung und der Dehnung. Die Verschiebung um φ im t-Bereich bewirkt eine Multiplikation mit $e^{-\varphi s}$ im s-Bereich:

$$g_1(t) := \begin{cases} \cos(t-\varphi), & t \geq \varphi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{liefert} \quad L(g_1)(s) = e^{-\varphi s}\frac{s}{s^2+1}.$$

Die Dehnung um ω im t-Bereich ist eine Ähnlichkeitstransformation $g_2(t) = g_1(\omega t)$. Das bedeutet, dass wir im s-Bereich jedes vorkommende s durch ω dividieren mssen:

$$L(g)(s) = L(g_2)(s) = \frac{1}{\omega}L(g_1)(\frac{s}{\omega}) = \frac{1}{\omega}e^{-\varphi s/\omega}\frac{\frac{s}{\omega}}{\frac{s^2}{\omega^2}+1} = \underline{e^{-\varphi s/\omega}\frac{s}{s^2+\omega^2}}.$$

d) Die Laplace-Transformierte des Integranden y^3 ist laut Tabelle $L(y^3)(s) = \frac{3!}{s^4}$. Die Integration im Urbildraum entspricht einer Multiplikation mit $1/s$ im s-Bereich, also

$$\underline{L(u)(s) = \frac{1}{s}\frac{3!}{s^4}}.$$

Aufgabe 47: a) Die Partialbruchzerlegung liefet

$$F(s) = \frac{2s}{s^4+2s^3+2s^2+2s+1} = \frac{2s}{(s^2+1)(s+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Der erste Summand ist gerade die Laplace-Transformierte von $\sin t$. Der zweite Summand ist ein wenig anspruchsvoller. Denken wir uns das $\ldots + 1$ im Argument weg, knnen wir die Korrspondenz $\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}t^1(s)$ ausnutzen, d.h. die Urbildfunktion wre t. Die Verschiebung des Arguments um 1 im s-Bereich schlielich gehrt laut Dmpfungssatz zu einer Multiplikation mit e^{-t} im Urbildbereich. Also insgesamt:

$$\underline{\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \sin t - te^{-t}}.$$

b) Wieder vergessen wir zunchst die Verschiebung um -1 im Argument, da diese spter lediglich noch einen exponentiellen Faktor bewirkt (Dmpfungssatz). Wir kmmern uns also zuerst um arccot s. Diese Funktion knnen wir leider auch nicht ohne Weiteres durch Nachschlagen in der Tabelle transformieren. Besser sieht es mit ihrer Ableitung aus: Es sei also

$$G(s) := -\frac{d}{ds}\text{arccot}s = \frac{1}{s^2+1}.$$

Diese Funktion lsst sich aber leicht zurck transformieren:

$$\mathcal{L}^{-1}(G(s))(t) = \sin t.$$

Wir wissen nun, dass zur Ableitung von arccot die Urbildfunktion $\sin t$ gehrt. Daher gehrt zum arccot selbst die Urbildfunktion $\frac{\sin t}{t}$. Die Verschiebung im Argument bewirkt dann nach dem Dmpfungssatz noch eine Multiplikation mit e^t:

$$\underline{\mathcal{L}^{-1}(\text{arccot}(s-1))(t) = e^t\frac{\sin t}{t}}.$$

c) Der Faktor e^{-pis} im Zhler gehrt zu einer Verschiebung des Arguments im t-Bereich. Wir betrachten also zunchst nur $G(s) := \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, deren Urbildfunktion laut Tabelle durch $\mathcal{L}^{-1}(G(s))(t) = J_0(t)$ (das ist die Bessel-Funktion) gegeben ist. Nun bercksichtigen wir die Verschiebung und erhalten

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{\sqrt{s^2+1}}\right)(t) = \underline{\begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le t \le \pi \\ J_0(t-\pi) & \text{für} \quad \pi \le t \le \infty \end{cases}}.$$

Aufgabe 48: Wir transformieren y und seine Ableitungen

$$\mathcal{L}(y(t)) = Y(s) \Rightarrow \mathcal{L}(y'(t)) = sY(s) - 1,\ \mathcal{L}(y''(t)) = s^2Y(s) - s,\ \mathcal{L}(y'''(t)) = s^3Y(s) - s^2 + 1$$

(dabei sind die Anfangswerte bereits eingearbeitet) sowie die rechte Seite

$$\mathcal{L}(e^{2t}) = \frac{1}{s-2}$$

und erhalten die transferierte Gleichung:

$$Y(s)(s^3 - s^2 + s - 1) - s^2 + 1 + s - 1 = \frac{1}{s-2}.$$

Auflsen nach $Y(s)$ liefert

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s-2} + s^2 - s}{s^3 - s^2 + s - 1} = \frac{s^3 - 3s^2 + 2s + 1}{(s-2)(s-1)(s^2+1)} \overset{\text{PBZ}}{=} \frac{1}{5}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{13}{10}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{10}\frac{1}{s^2+1}$$

Rücktransformation:

$$y(t) = \underline{\frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{13}{10}\cos t + \frac{1}{10}\sin t}.$$

Aufgabe 49: Hier haben wir eine Anfangsbedingung zu wenig, d.h. wir wissen nichts ber $y'(0)$. Also setzen wir $y'(0) = C$ mit einer beliebigen Konstanten C. Das ergibt fr die Transformierten von y und seinen Ableitungen

$$\mathcal{L}(y(x)) = Y(s),\ \mathcal{L}(y'(x)) = sY(s) - 1,\ \mathcal{L}(y''(x) = s^2Y(s) - s - C,$$

whrend die rechte Seite einfach mit der Tabelle transformiert wird:

$$\mathcal{L}(-11\cos(2x) + 2\sin(2x)) = -\frac{11s+4}{s^2+4}.$$

Als haben wir die transformierte Gleichung

$$Y(s)(s^2 + 2s + 1) - s - C - 2 = -\frac{11s+4}{s^2+4}$$

Auflsen nach $Y(s)$ liefert

$$Y(s) = \frac{s^3 + (C+2)s^2 - 7s + 4C + 12}{(s^2+4)(s+1)^2} \overset{\text{PBZ}}{=} \frac{C+4}{(s+1)^2} + \frac{s}{s^2+4} - \frac{4}{s^2+4}.$$

Rücktransformation:

$$y(x) = \underline{(C+4)xe^{-x} + \cos 2x - 2\sin 2x,\ C \in \mathbb{R}}.$$

Aufgabe 50: Es seien $X(s) := \mathcal{L}(x(t))(s),\ Y(s) := \mathcal{L}(y(t))(s),\ Z(s) = \mathcal{L}(z(t))(s)$ die Transformierten der gesuchten Funktionen. Dann haben wir unter Bercksichtigung der Anfangswerte

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = sX(s),\ \mathcal{L}(\dot{y}(t)) = sY(s),\ \mathcal{L}(\dot{z}(t)) = sZ(s) - 1.$$

Zudem ist

$$\mathcal{L}(e^t\cos 2t)(s) = \mathcal{L}(\cos 2t)(s-1) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(\cos t)\left(\frac{s-1}{2}\right) = \frac{s-1}{(s-1)^2+4}.$$

Das transformierte System lautet also:

$$\begin{aligned} sX \quad &= X \\ sY \quad &= 2X + Y - 2Z \\ sZ - 1 &= 3X + 2Y + Z + \tfrac{s-1}{(s-1)^2+4} \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt sofort $X(s) \equiv 0$, zu lsen verbleibt also

$$\begin{aligned} (s-1)Y + 2Z &= 0 \\ -2Y + (s-1)Z &= \frac{s-1}{(s-1)^2+4} + 1. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $-\frac{1}{2}(s-1)$ und addieren sie zur zweiten, um Z zu eliminieren und erhalten:

$$(-\frac{1}{2}(s-1)^2 - 2)Y = -\frac{1}{2}(s^2 - 2s + 5)Y = -\frac{1}{2}((s-1)^2 + 4)Y = \frac{s-1}{(s-1)^2+4} + 1,$$

also $Y(s) = \dfrac{-2(s-1)}{((s-1)^2+4)^2} + \dfrac{(-2)1}{(s-1)^2+4}$. Aus der ersten Gleichung folgt dann

$$Z(s) = -\frac{1}{2}(s-1)Y(s) = \frac{(s-1)^2}{((s-1)^2+4)^2} + \frac{s-1}{(s-1)^2+4}.$$

Nun mssen wir diese Lsungen zurcktransformieren. Offensichtlich ist

$$\underline{x(t) = 0,\ t \geq 0}.$$

Um $y(t)$ zu berechnen, beachten wir, dass

$$Y(s) = W(s-1) \text{ mit } W(s) := \frac{-2s}{(s^2+4)^2} + \frac{-2}{s^2+4}.$$

Der zweite Summand ist einfach, er korrespondiert mit $-\sin(2t)$. Der erste Summand ist gerade die Ableitung von $\dfrac{1}{s^2+4}$. Dieser Term gehrt aber zu $\frac{1}{2}\sin(2t)$, und nach dem Satz ber die Differentiation im Bildraum korrespondiert deshalb der erste Summand mit $-t\frac{1}{2}\sin(2t)$. Wir mssen nun noch den Dmpfungssatz anwenden und erhalten

$$\underline{y(t) = -e^t(\frac{t}{2}\sin(2t) + \sin(2t)),\ t \geq 0}.$$

Analog ist

$$Z(s) = V(s-1) \text{ mit } V(s) := \frac{s^2}{(s^2+4)^2} + \frac{s}{s^2+4} = \frac{1}{2}\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} + \frac{1}{2}\frac{s^2+4}{(s^2+4)^2} + \frac{s}{s^2+4}.$$

Der erste Summand korrespondiert laut Tabelle mit $\dfrac{1}{2}t\cos(2t)$, der zweite (krzen!) mit $\dfrac{1}{4}\sin(2t)$ und der letzte mit $\cos(2t)$. Mit dem Dmpfungssatz folgt daraus

$$z(t) = \underline{e^t(\frac{1}{2}t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t + \cos 2t),\ t \geq 0}.$$

Man kann sich aber in diesem Beispiel auch die Rcktransformation sparen: Aus der zweiten Gleichung des Originalsystems folgt nmlich

$$z(t) = \frac{1}{2}(y(t) - \dot{y}(t)) = ... = e^t(\cos 2t + \frac{1}{2}t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t),\ t \geq 0.$$

¡hr¿¡b¿Timeout. This is only a partial we