Aufgabe 51: Mit den Korrespondenzen $\sin t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2+1}$ und $\cos t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+1}$ sowie

$$y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet Y(s),\ y'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sY(s)-A,\ z(t) \circ\!\!-\!\!\bullet Z(s),\ z'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sZ(s)-B,\ A,B \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

erhalten wir das transferierte System:

$$\begin{aligned} (3s+1)Y - 2Z &= 3A + \tfrac{1+3s}{s^2+1} \\ -4Y + (3s-1)Z &= 3B - \tfrac{4}{s^2+1} \end{aligned}$$

Auflösen nach Y und Z liefert

$$\begin{aligned} Y &= \tfrac{A+B}{3}\tfrac{1}{s-1} + \tfrac{2A-B}{3}\tfrac{1}{s+1} + \tfrac{1}{s^2+1} \\ Z &= \tfrac{2(A+B)}{3}\tfrac{1}{s-1} - \tfrac{2A-B}{3}\tfrac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

Zur Abkürzung setzen wir $3K = A+B$ und $3L = 2A-B$ und erhalten

$$y(t) = \underline{Ke^t + Le^{-t} + \sin t}, \quad z(t) = \underline{2Ke^t - Le^{-t}},\ K,L \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 52: a) Wir wissen, dass $G(s) := \frac{1}{s+4}$ die Laplace-Transformierte der Funktion $g(t) = e^{-4t}$ ist und $H(s) := \frac{1}{s-1}$ die Laplace-Transformierte der Funktion $h(t) = e^t$. Nach dem Faltungssatz ist also ihr Produkt die Laplace-Transformierte der *Faltung* von g und h. Genauer haben wir:

$$f(t) = 2(e^{-4t} * e^t) = 2\int_0^t e^{-4(t-\tau)}e^\tau d\tau = 2e^{-4t}\int_0^t e^{5\tau}d\tau = 2e^{-4t}[\frac{e^{5\tau}}{5}]_0^t = \underline{\frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5}e^{-4t}}.$$

b) Es sei $h(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ die *Heaviside*- oder Einheitssprung-Funktion. Ihre Laplace-Transformierte ist $H(s) = \frac{1}{s}$. Zur Multiplikation mit e^{-3s} bzw. e^{-s} gehört nach dem Verschiebungssatz eine Verschiebung des Arguments um 3 bzw. 1. Der erste Faktor korrespondiert also zu $h(t-3) - h(t-1)$ (das ist eine „Rechteckfunktion“ , die für $t \in [1,3]$ den Wert -1 hat und sonst 0 ist.
Der zweite Faktor ist einfach die Laplace-Transformierte von $\cos(2t)$. Insgesamt haben wir also

$$\begin{aligned} f(t) &= 2(h(t-3) * \cos(2t)) - (h(t-1) * \cos(2t)) \\ &= 2\int_0^t H(\underbrace{t-\tau-3}_{\geq 0 \Leftrightarrow \tau \leq t-3})\cos(2\tau)d\tau - \int_0^t H(\underbrace{t-\tau-1}_{\geq 0 \Leftrightarrow \tau \leq t-1})\cos(2\tau)d\tau \\ &= 2\int_0^{t-3}\cos(2\tau)d\tau - \int_0^{t-1}\cos(2\tau)d\tau \\ &= [\sin(2\tau)]_0^{t-3} - \frac{1}{2}[\sin(2\tau)]_0^{t-1} = \underline{\sin(2t-6) - \frac{1}{2}\sin(2t-2)}. \end{aligned}$$

Obwohl hier in der Aufgabenstellung die Anwendung des Faltungssatzes verlangt war, geht es einfacher mit dem Verschiebungssatz:

$$F(s) = e^{-3s} \cdot \frac{2}{s^2+4} - \frac{1}{2}e^{-s} \cdot \frac{2}{s^2+4} \bullet\!\!-\!\!\circ f(t) = \sin(2t-6) - \frac{1}{2}\sin(2t-2).$$

Aufgabe 53: Man sieht unschwer, dass es sich um eine *Faltungsintegralgleichung* handelt:

$$f(x) - 2(\cos * f)(x) = e^x.$$

Wenn wir auf beide Seiten die Laplace-Transformation anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} F(s) - 2\mathcal{L}(\cos)(s) \cdot F(s) &= \frac{1}{s-1} \\ F(s) - \frac{2s}{s^2+1}\,F(s) &= \frac{1}{s-1} \\ F(s) &= \frac{s^2+1}{(s-1)^3}. \end{aligned}$$

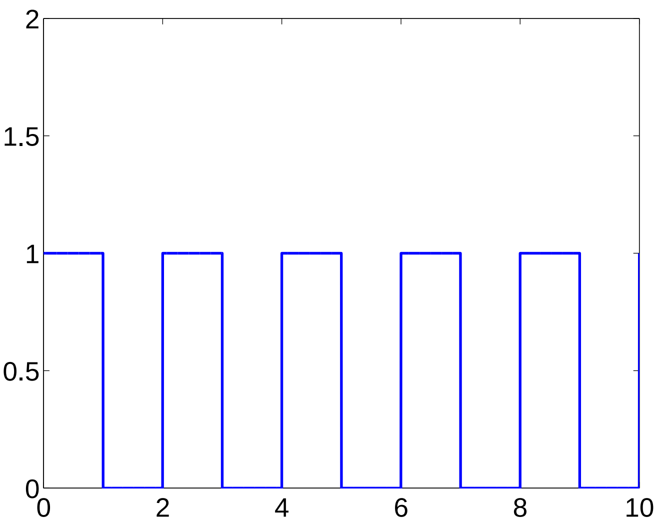
Diesen Term zerlegen wir in Partialbrüche

$$\begin{aligned}
\frac{s^2+1}{(s-1)^3} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} \\
s^2+1 &= A(s-1)^2 + B(s-1) + C
\end{aligned}$$

Einsetzen von $s = 1$ liefert sofort $\underline{C = 2}$.
Man könnte nun zwei weitere Werte für s einsetzen, um zwei weitere Gleichungen für die fehlenden Parameter zu gewinnen. Eleganter ist es, sich die Ableitungen anzusehen. Diese müssen nämlich auch übereinstimmen!
Ableiten: $2s = 2A(s-1) + B : s = 1 : \underline{B = 2}$
Nochmal ableiten: $2 = 2A$, $\underline{A = 1}$
Also

$$F(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s-1)^3} \bullet\!\!-\!\!\circ\ f(x) = \underline{e^x + 2xe^x + x^2e^x}.$$

Aufgabe 54: a)



b) Es sei R_m die Rechteckfunktion, die nur auf dem Intervall $[2m, 2m+1]$ den Wert 1 hat und sonst 0 ist. Ihre Laplacetransformierte ist

$$\int\limits_0^\infty R_m e^{-st} dt = \int\limits_{2m}^{2m+1} e^{-st} dt = [-\frac{e^{-st}}{s}]_{2m}^{2m+1} = \frac{1}{s}(e^{-2ms} - e^{-2ms-s}) = \frac{1-e^{-s}}{s} e^{-2ms}.$$

Wenn wir all diese Funktionen aufsummieren, erhalten wir $F(s)$:

$$F(s) = \frac{1-e^{-s}}{s} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2ms} = \frac{1-e^{-s}}{s} \frac{1}{1-e^{-2s}} = \frac{1}{s} \frac{1-e^{-s}}{(1-e^{-s})(1+e^{-s})} = \underline{\frac{1}{s(1+e^{-s})}}.$$

Dabei wurde die Summe mit Hilfe der geometrischen Summenformel aufgelöst. Die Faktorisierung des Nenners beruht auf der dritten binomischen Formel.

Aufgabe 55: a): Wir müssen die drei Normeigenschaften Dreiecksungleichung, Homogenität und positive Definitheit zeigen. Im folgenden seien x, $y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Für die $\|\cdot\|_1$-Norm haben wir:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_1 &= \sum_{j=1}^n |x_j + y_j| \le \sum_{j=1}^n (|x_j| + |y_j|) = \sum_{j=1}^n |x_j| + \sum_{j=1}^n |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1, \\
\|\lambda\, x\|_1 &= \sum_{j=1}^n |\lambda\, x_j| = \sum_{j=1}^n |\lambda|\, |x_j| = |\lambda|\, \|x\|_1.
\end{aligned}$$

Fehlt noch die positive Definitheit. Sei also $x \neq 0$. Dann ist eine Komponente $x_{j_0} \neq 0$, $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$, und es gilt:

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \ \ge\ |x_{j_0}| > 0.$$

Für die $\|\cdot\|_\infty$-Norm ist analog:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_\infty &= \max_{j=1,\ldots,n} |x_j+y_j| \le \max_{j=1,\ldots,n} (|x_j|+|y_j|) \le \max_{j=1,\ldots,n} |x_j| + \max_{j=1,\ldots,n} |y_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty, \\
\|\lambda\, x\|_\infty &= \max_{j=1,\ldots,n} |\lambda\, x_j| = \max_{j=1,\ldots,n} |\lambda|\, |x_j| = |\lambda| \max_{j=1,\ldots,n} |x_j| = |\lambda|\, \|x\|_\infty.
\end{aligned}$$

Zum Beweis der Definitheit sei wieder $x \neq 0$, d.h. $x_{j_0} \neq 0$, $j_0 \in \{1,\ldots,n\}$. Dann ist

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j| \;\ge\; |x_{j_0}| > 0.$$

Zu b): Die Dreiecksungleichung und die Homogenität sind zwar erfüllt, nicht aber die positive Definitheit. Betrachte zum Beispiel $x = (1,0)^\top$. Dann ist $x \neq 0$ aber $\|x\| = 0$. Somit ist durch die Definition keine Norm gegeben.