Aufgabe 56: a)

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_2a_3 - a_2b_3 \\ a_1b_3 - b_1a_3 \\ a_2b_1 - a_1b_2 \end{pmatrix} = -b \times a.$$

b) Hier verwendet man vorteilhafterweise die bekannten Rechenregeln. Das Distributivgesetz liefert:

$$\begin{aligned} a \times (b + c) + b \times (a + c) + c \times (a + b) &= a \times b + a \times c + b \times a + b \times c + c \times a + c \times b \\ &= a \times b + b \times a + a \times c + c \times a + b \times c + c \times a \\ &= 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

nach Aufgabenteil a).
c)

$$(a \times b) \cdot c = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 = \det[a, b, c].$$

Ebenso:

$$a \cdot (b \times c) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 = \det[a, b, c].$$

d) Auch hier geht es einfach mit den Rechenregeln:

$$(a+b) \times (a-b) = (a+b) \times a - (a-b) \times b = a \times a + b \times a - a \times b + b \times b = 0 + b \times a + b \times a + 0 = 2(b \times a).$$

Aufgabe 57: a)

$$\begin{aligned} D &= -3 \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -5 & 2 & 2 \\ -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{nach 3.Spalte entw.}} -7 \underbrace{\begin{vmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{Zeilenumformung}} = -3 \left[-3 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} \right] - 7 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 18 & -3 \\ 0 & -5 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{nach 1.Spalte entw.}} \\ &= -3[(-3)9 - 2(-3)] - 7 \cdot 3 \begin{vmatrix} 18 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-3)(-21) - 21 \cdot 21 = -21 \cdot 18 = -378. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} D &= \underbrace{-7 \begin{vmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix}}_{=-21 \cdot 21 \text{ nach Teil a}} \underbrace{-3 \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -1 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{nach 1.Zeile entw.}} \\ &= -21 \cdot 21 - 3(-3) \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - 2(-3) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = -441 + 9 \cdot 9 + 6(-3) = -378. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{matrix} -3 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 11 \\ 0 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & 7 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{63}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{105}{4} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{63}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{matrix}.$$

Die Determinante der Dreiecksmatrix ist immer das Produkt der Diagonaleintrge:

$$D = (-3) \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 42 = -378.$$

Aufgabe 58: a)

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \underline{r}.$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{vmatrix} = \underline{1}.$$

c) Wir ziehen aus der zweiten und dritten Spalte das r vor die Determinante und aus der dritten Spalte einen Faktor $\cos\vartheta$:

$$\begin{vmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\cos\varphi & -r\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta & 0 \end{vmatrix} = r^2\cos\vartheta \begin{vmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -sin\vartheta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \end{vmatrix}.$$

Entwicklung nach 3.Spalte liefert

$$= r^2\cos\vartheta \left[-\sin\varphi \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{vmatrix}}_{=\sin\varphi} - \cos\varphi \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{vmatrix}}_{\cos\varphi} \right] = \underline{-r^2\cos\vartheta}$$

d)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-c & a^2-c^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & a^2-c^2 \\ b-c & b^2-c^2 \end{vmatrix} = (a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & a+c \\ 1 & b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = \underline{(a-c)(b-c)(b-a)}$$

Aufgabe 59: Es gilt

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = 2(\alpha+1)\alpha.$$

Dies ist offensichtlich 0 genau fr

$$\underline{\alpha \in \{-1, 0\}}.$$

Aufgabe 60: a) Fr $n = 5$ erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

b)

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} x & 1 & & \dots & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ 1 & \dots & & 1 & x \end{vmatrix} \\
&\stackrel{*}{=} \begin{vmatrix} x-1 & 0 & \dots & 0 & 1-x \\ 0 & x-1 & \ddots & \vdots & 1-x \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots\vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & \dots & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \stackrel{**}{=} \begin{vmatrix} x-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots\vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x-1 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & x+(n-1) \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

* Subtraktion der letzten Zeile von allen übrigen Zeilen ** Addition der ersten $(n-1)$ Spalten zur letzten Spalte.

Nun hat die Matrix untere Dreiecksgestalt, und ihre Determinante ist das Produkt der Diagonaleinträge, also

$$A = \underline{(x-1)^{n-1} \cdot (x+(n-1))}.$$

¡hr¿