Aufgabe 11: a) Inhomogene lineare DGL 1. Ordnung: Lösung der homogenen DGL: $y' = \frac{1}{1-x}y$ ist $y = C\frac{1}{x-1}$. (Getrennte Veränderliche, beachte $x > 1$!). Daraus partikuläre Lösung mit Variation der Konstanten: $y' = C'(x)\frac{1}{x-1} - C(x)\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{1-x}\frac{C(x)}{x-1} + x - 1$, also $C'(x) = (x-1)^2$, $C(x) = (x-1)^3/3$ und damit $y_p = (x-1)^2/3$. Also $y = y_p + y_h = \frac{C}{x-1} + (x-1)^2/3$. Anpassen der Anfangswerte ergibt: $0 = C + 1/3$, daher $C = -1/3$ und somit $y = \frac{1}{3}((x-1)^2 - \frac{1}{x-1})$.
b)Typ $y' = f(ax + by(x) + c)$ mit $a = b = c = 1$. Substitution $z = x + y + 1$ ergibt DGL mit getrennten Veränderlichen: $z' = 1 + \sin(z) \Leftrightarrow \frac{dz}{1+\sin(z)} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{1+\sin(z)} = \int dx \Rightarrow \int \frac{1-\sin(z)}{1-\sin^2(z)}dz = \int \frac{1-\sin(z)}{\cos^2(z)}dz = \int \frac{1}{\cos^2(z)}dz - \int \frac{\sin(z)}{\cos(z)}dz = tan(z) - \frac{1}{\cos(z)} = x + C$, also ist die allgem. Lösung in impliziter Form gegeben durch $\tan(x+y+1) - \frac{1}{\cos(x+y+1)} = x + c$. Anpassen der Anfangsbed.: $\tan(1) - \frac{1}{\cos(1)} = c$.
c)Umstellen und Division durch xy^2 ergibt: $y' = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x} = (-1/x)y + xy^{-2}$. Dies ist eine Bernoullische DGL mit $p(x) = -x$,$q(x) = x$ und $\alpha = -2$. Wir setzen also $v := y^(1-(-2)) = y^3$ und erhalten die inhomogene lineare DGL $v' = 3(-1/x)v + 3x$. Die allg. Lösung v_h der homogenen DGL $v' = 3(-1/x)v$ ist $v_h = Cx^{-3}$ (getrennte Veränderliche). Eine partikuläre Lösung erhält man durch Variation der Konstanten: $v_p = C(x)/x^3$. Eingesetzt: $v_p' = \frac{C'(x)}{x^3} - 3\frac{C(x)}{x^4} = 3(-1/x)\frac{C(x)}{x^3} + 3x$ also $C'(x) = 3x^4$ oder $C = \frac{3}{5}x^5$. Also $v = v_p + v_h = \frac{3}{5}x^5 + Cx^{-3}$ und $y = (\frac{3}{5}x^5 + Cx^{-3})^{\frac{1}{3}}$. Anpassen der Anfangsbed. liefert $C = 2/5$.
d)Autonome DGL: $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$, also $\arcsin y = x + c$, d.h. $y = \sin(x + c)$. ABed.: $1 = \sin(0 + c)$, also $c = \pi/2$.

Aufgabe 12: a) Bernoulli-Dgl. mit $\alpha = 3 \Rightarrow$ Substitution $y = v^{\frac{1}{1-3}} = v^{-\frac{1}{2}}$ führt auf AWP $v' = 2x + 4v,\ v(0) = 1$.
Lösungsformel liefert $v(x) = \frac{1}{8}(9e^{4x} - 4x - 1)$ und Rücksubstitution führt auf $y(x) = \frac{1}{\sqrt{v(x)}} = \sqrt{\frac{8}{9e^{4x}-4x-1}}$.
b) Die angegebene Substitution $u = xy$ liefert $\frac{du}{(u-1)^2} = -\frac{1}{x}dx \Rightarrow\ u(x) = 1 + \frac{1}{\ln x + C}$.
Anfangsbedingung $u(1) = 2$ liefert $C = 1 \Rightarrow\ u(x) = \frac{\ln x+2}{\ln x+1}$ und somit $y(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{lnx+2}{\ln x+1}\right),\ x > 0$.

Aufgabe 13: Es handelt sich um eine Bernoulli-Differentialgleichung. Wir setzen $v = y^{-2}$, d.h. $v' = -2y'y^{-3}$. Dann erhalten wir für v die lineare Differentialgleichung $v' - 2v = -2$.
Zunächst lösen wir die homogene DGL durch Separation, d.h.

$$\ln|\tilde{v}| = \int \frac{1}{\tilde{v}}\, d\tilde{v} = \int \frac{\tilde{v}'(x)}{\tilde{v}(x)}\, dx = \int 2\, dx = 2x + c.$$

Also folgt $\tilde{v} = \tilde{c}\, e^{2x}$. Durch Variation der Konstanten $\tilde{c}$ lässt sich nun die allgemeine Lösung ermitteln. Aus $\tilde{c}'(x) = -2e^{-2x}$ bzw. $\tilde{c}(x) = e^{-2x} + \tilde{c}$ ergibt sich $v(x) = 1 + c\, e^{2x}$ bzw. $y(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+c\, e^{2x}}}$. Die Anfangsbedingung $y(0) = 1/2$ impliziert $c = 3$. Somit ist $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+3\, e^{2x}}}$ die gesuchte Lösung.

Aufgabe 14: $P(u) := 3u^3 + u - 3$, $Q(u) := 1 + 5u^2 + 4u^4 = (1+u^2)(1+4u^2)$. Ansatz $\frac{P(u)}{Q(u)} = \frac{Au+B}{1+u^2} + \frac{Cu+D}{1+4u^2}$.
$\Rightarrow\quad P(u) = (Au + B)(1 + 4u^2) + (Cu + D)(1 + u^2)$. Einsetzen der Nullstellen $u = i$ bzw. $u = \frac{i}{2}$ und Vergleich von Real- bzw. Imaginärteil liefert $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = \frac{1}{3}$ und $D = -\frac{8}{3}$.
$\int \frac{P(u)}{Q(u)}du = \frac{2}{3}\int \frac{u+1}{u^2+1}du + \frac{1}{3}\int \frac{u-8}{1+4u^2}du = \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}\ln|u^2+1| + \arctan u\right\} + \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{8}\ln|1+4u^2| - 8\frac{1}{2}\arctan 2u\right\}$.

Aufgabe 15: Substitution $e^x = u$, also $du = e^x dx$ führt auf $\int \frac{e^x-1}{e^{2x}+2e^x-1}dx = \int \frac{u-1}{(u^2+2u-1)u}du$. Dieses Integral zerlegen wir mit Partialbruchzerlegung. Der Ansatz dazu lautet $\frac{u-1}{(u^2+2u-1)} = \frac{Au+B}{u^2+2u-1} + \frac{C}{u} \overset{!}{=} \frac{u-1}{(u^2+2u-1)u}$. Durchmultipliziert mit dem Hauptnenner ergibt dies $(Au + B)u + C(u^2 + 2u - 1) = u - 1$. Für $u = 0$ folgt daraus $\underline{C = 1}$. Für $u \to 1$ erhalten wir $A + B + 2C = 0$, folglich $A + B = -2$. Schließlich liefert $u \to -1$ die Beziehung $A - B - 2C = -2$, also $A - B = 0$ und damit $A = B = -1$. Deshalb haben wir $\int \frac{u-1}{(u^2+2u-1)u}du = \int\left(\frac{1}{u} - \frac{u+1}{u^2+2u-1}\right)dx \overset{*}{=} \ln|u| - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \ln|u| - \frac{1}{2}\ln|(u^2 + 2u - 1)| = x - \frac{1}{2}\ln|e^2x - 2e^x - 1|$. Bei (*) haben wir $z = u^2 + 2u - 1$ substituiert, was wegen $dz = (2u + 2)du$ hier erfolgreich war. Diese Besonderheit erspart wie bereits in Aufgabe 14 ein Aufspalten von $u^2 + 2u - 1$ in Linearfaktoren.