Aufgabe 16: Zählerpolynom $P(x) := 4x^4 - 2x^3 + 29x^2 - 6x + 50$. Nullstelle $x = 1$ des Nennerpolynoms $Q(x) := x^5 - x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 16x - 16$ erraten. Polynomdivision liefert $Q(x) = (x-1)(x^4 + 8x^2 + 16)$ $= (x-1)(x^2+4)^2$. Daher Ansatz: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$. Das ergibt durch Multiplikation mit $Q(x)$: $P(x) = A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x^2+4)(x-1) + (Dx+E)(x-1)$. Einsetzen von $x = 1$ liefert $A = 3$. Einsetzen von $x = 2i$, Vergleich von Realteil, Imaginärteil liefert $D = 0, E = 2$. $x = 0$ bzw. $x = -1$ eingesetzt ergibt $C = -1$, $B = 1$. Somit $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{x-1}{x^2+4dx} + \int \frac{2}{(x^2+4)^2}dx = 3\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}$ $+2\left[\frac{2x}{16(x^2+4)} + \frac{2}{16}\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right] = 3\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \frac{3}{8}\arctan\frac{x}{2} + \frac{x}{4(x^2+4)}$.

Aufgabe 17: Darstellung von $\sin x$, $\cos x$ durch $\tan\frac{x}{2} =: t$ ergibt für den Zähler: $2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2} - \left(\frac{2}{1+t^2}\right)^2 = \frac{6t^3+2t-4}{(1+t^2)^2}$ und für den Nenner $2+2\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{16t^2+4}{(1+t^2)^2}$. Damit folgt $\int \frac{2\sin x - \sin x\cos x - (1+\cos x)^2}{2+2\cos x+3\sin^2 x}dx$ $= \int \frac{6t^3+2t-4}{(1+t^2)^2}\frac{(1+t^2)^2}{16t^2+4}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{3t^3+t-2}{(4t^2+1)(1+t^2)}dt$ vgl. Aufgabe 14b).

Aufgabe 18: a) $u = \tan x,\ du = (1+u)\ dx,\ x_1 = 0,\ u_1 = ?,\ x_2 = \frac{\pi}{4},\ u_2 = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow$

$J = \int\limits_{x_1=0}^{x_2=\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\tan x} = \int\limits_{u_1=0}^{u_2=1} \frac{du}{(u^2+1)(u+1)},\ \frac{1}{(u^2+1)(u+1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{Bu+C}{u^2+1}$

$\Rightarrow 1 = A(u^2+1) + (Bu+C)(u+1),\ u = -1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$u = i : 1 = (Bi+C)(1+i) = (C-B) + i(B+C) \Rightarrow C - B = 1 \wedge C + B = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{du}{u+1} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{du}{u^2+1} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{u\ du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\left[\ln|u+1| + \arctan u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1)\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}(\ln 2 + \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln 2) = \underline{\underline{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2}}$

b) $v = \tan\frac{x}{2},\ x = 2\arctan v,\ dx = \frac{2dv}{1+v^2},\ tanx = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2v}{1-v^2},\ v_1 = 0,\ v_2 = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$

$J = \int\limits_{v_1}^{v_2} \frac{2v^2-2}{(v^2+1)(v^2-2v-1)}\ dv;\ \frac{2v^2-2}{(v^2+1)(v^2-2v-1)} = \frac{Av+B}{v^2+1} + \frac{Cv+D}{v^2-2v-1}$

$\Rightarrow 2v^2 - 2 = (Av+B)(v^2-2v-1) + (Cv+B)(v^2+1)$

$v = 0 : -2 = -B + D;\quad v = i : -4 = (Ai+B)(-2-2i) = (2A-2B) + i(-2A-2B)$

$\Rightarrow A - B = -2 \wedge A + B = 0 \Rightarrow \underline{A = -1,\ B = 1 \wedge D = -1}$

$v = 1 : 0 = (A+B)(-1) + (C+D)2 \Rightarrow C + D = 0 \Rightarrow \underline{C = 1}$

$J = \int\limits_{v_1}^{v_2}\left(\frac{-v+1}{v^2+1} + \frac{v-1}{v^2-2v-1}\right)\ dv = \left[-\frac{1}{2}\ln|v^2+1| + \arctan v + \frac{1}{2}\ln|v^2-v-1|\right]_0^{\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1} = -\frac{1}{2}\ln|4 - 2\sqrt{2}| + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln|4-4\sqrt{2}| = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{4-4\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\right| = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{-2+2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2}{2-\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln\sqrt{2} =$ $\underline{\underline{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2}}$.Bem.: $\frac{Cv+D}{v^2-2v-1} = \frac{E}{(v-1-\sqrt{2})} + \frac{F}{(v-1+\sqrt{2})}$ erübrigt sich, da C und D gerade so schön herauskommen!

Aufgabe 19: a) $\int \ln x dx = x\ln x - x$, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{-\ln t}{t} = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{-\frac{1}{t}}{1} = 0$.

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \ln x dx = 1\ln 1 - 1 - \lim\limits_{x\to 0}(x\ln x - x) = -1$.

b) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln\cos x$ auf $[0,\ \frac{\pi}{2})$. Wegen $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(-\ln\cos x) = \infty$ exist. das Integral nicht.

c) Wegen $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$ macht man den Ansatz (Partialbruchzerlegung !) $\frac{x+2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$. $\Rightarrow x + 2 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2$.

Einsetzen von $x = 1$, $x = -1$, $x = 0$ liefert $A = \frac{-1}{4}$, $B = \frac{3}{2}$, $C = \frac{1}{4}$.

Daher ist $\int \frac{x+2}{x^3-x^2-x+1}dx = \frac{-1}{4}\ln|x-1| + \frac{3}{2}\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{4}\ln|x+1| = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{3}{2}\frac{1}{x-1}$.

Folglich $\int\limits_2^\infty \frac{x+2}{x^3-x^2-x+1}dx = \lim\limits_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{3}{2}\frac{1}{x-1}\right\} - \left\{\frac{1}{4}\ln 3 - \frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\ln 3$.

Aufgabe 20: a) $x \in (0,1] : e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + ... \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{e^x-1} < \frac{\sqrt{x}}{x}$. Es ist $\int\limits_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\ dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 2$. Also haben wir $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^x-1}\ dx < \int\limits_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\ dx = 2$, also insbesondere die Existenz des Integrals.

b) $x \in (1,\infty) : e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + .. \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{e^x-1} < \frac{\sqrt{x}}{\frac{x^2}{2}}$. Es ist $\int\limits_1^\infty 2\cdot x^{-\frac{3}{2}}\ dx = \left[-4x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^\infty = 4$.

Also haben wir Konvergenz und man erhält $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x-1}\ dx < 4$.

Folglich existiert auch $J = J_1 + J_2$ und kann durch $J \leq 2 + 4 = 6$ nach oben abgeschätzt werden.