Aufgabe 21: a) $S_4 = \frac{0,25}{3}\left\{f(0)+4f(\frac{1}{4})+2f(\frac{1}{2})+4f(\frac{3}{4})+f(1)\right\} \approx 0,7854.$
b) $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$. $f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$, $f'''(x) = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \geq 0$ für $x \in [0,\ 1]$. "Quadraturfehler"
$|E| = |\frac{-h}{12} f''(\xi)| \overset{!}{<} 10^{-2} \Leftrightarrow n > \left[|\frac{10^2}{12} f''(\xi)|\right]^{\frac{1}{2}}$, da $h = \frac{1}{n}$. Bestimme $\max |f''(\xi)|$: Wegen $f'''(x) \geq 0$ und $\xi \in (0,\ 1)$ ist $\max |f''(x)| = \max(|f''(0)|,\ |f''(1)|) = 2 \Rightarrow n \overset{!}{>} \sqrt{\frac{100}{12} 2} = 4,..$ also $n \geq 5$. $T_5 = 0,7837$.

Aufgabe 22: Die Vertauschung von Differentiation und Integration ergibt für $0 < t < 1$:

$$J'(t) = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-t^2x^2}}\ dx = \left[-\frac{1}{t^2}\sqrt{1-t^2x^2}\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2} + \frac{1}{t^2}.$$

Dies können wir nun integrieren um $J(t)$ zu erhalten:

$$\int \frac{1}{t^2}dt - \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}dt = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\sqrt{1-t^2} - \int \frac{2t}{2t\sqrt{1-t^2}}dt = -\frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} - \arcsin t + C$$

Damit erhält man

$$J(t) = -\frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} + \arcsin t + C, \quad 0 < t < 1,$$

und dies ist im nachhinein auch gültig für $t = 0$ (Stetigkeit des Parameterintegrals bei stetigem Integranden). Aus $J(0) = 0$ folgt $C = 0$. Im Intervall $0 \leq t < 1$ gilt

$$J(t) = \frac{(\sqrt{1-t^2}-1)(\sqrt{1-t^2}+1)}{t(\sqrt{1-t^2}+1)} + \arcsin t = -\frac{t}{1+\sqrt{1-t^2}} + \arcsin t.$$

Die stetige Fortsetzung nach $t = 1$ liefert: $\lim\limits_{t\to 1} J(t) = -1 + \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 23: a) $\int\limits_0^\infty (3e^4t+2)e^{-st}dt = \int\limits_0^\infty (3e^{(4-s)t}+2e^{-st})dt = [\frac{3}{4-s}e^{(4-s)t}]_0^\infty + [-\frac{2}{s}e^{-st}]_0^\infty = \frac{2}{s} - \frac{3}{4-s}.$
Der erste dieser beiden Grenzwerte existiert, wenn $4 - s < 0$, also $s > 4$ ist. In diesem Fall ist auch der zweite GW definiert, also existiert dieses Integral fr $\underline{s > 4}$.
b) $\int\limits_0^\infty e^{-t}\cos(2t)e^{-st}dt = \int\limits_0^\infty \cos(2t)e^{-(s+1)t}dt = [\frac{e^{-(s+1)t}}{(s+1)^2+4}(-(s+1)\cos(4t)+2\sin(4t))]_0^\infty = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}.$
Dieses Integral existiert fr $\underline{s > -1}$.

Aufgabe 24: a) $\langle P_0|P_1\rangle = \int\limits_{-1}^1 1\cdot x dx = 0$ (Symmetrie), $\langle P_0|P_2\rangle = \int\limits_{-1}^1 1\cdot(3x^2-1)dx = [x^3-x]_{-1}^1 = 0,$
$\langle P_1|P_2\rangle = 0$ (Symmetrie) $\Rightarrow$ Orthogonalsystem.
$||P_0||^2 = \langle P_0|P_0\rangle = \int\limits_{-1}^1 1dx = 2, ||P_1||^2 = \int\limits_{-1}^1 x^2dx = \frac{2}{3}, ||P_2||^2 = \int_{-1}^1(3x^2-1)^2dx = ... = \frac{8}{5}.$
b) Ansatz $P = \sum\limits_{i=0}^2 a_iP_i$ ergibt $\langle P|P_j\rangle = \sum a_i\langle P_i|P_j\rangle = a_j||P_j||^2$, also $a_j = \frac{\langle P|P_j\rangle}{||P_j||^2}, j = 0,1,2.$
$a_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1(x^2-x+1)\cdot 1dx = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}-0+2) = \frac{4}{3}.$ $a_1 = \frac{3}{2}\int\limits_{-1}^1(x^2-x+1)xdx = \frac{3}{2}(0-\frac{2}{3}+0) = -1$
$a_2 = \frac{5}{8}\int\limits_{-1}^1(x^2-x+1)(3x^2-1)dx = ... = \frac{1}{3}.$
(Bem.: Einfacher geht es mit Koeffizientenvergleich: $P = \sum a_iP_i \Leftrightarrow x^2-x+1 = a_0 + a_1x + a_2(3x^2-1)$ $= 3a_2x^2 + a_1x + a_0 - a_2 \Leftrightarrow 1 = 3a_2, -1 = a_1, 1 = a_0 - a_2 \Leftrightarrow a_2 = \frac{1}{3}, a_1 = -1, a_0 = \frac{4}{3}$).
Aufgabe 25: a) $f(x) = \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$
b) $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ wegen $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1.$
c) $f(x) = \sin^2 x + 1 = 1 - \cos^2 x + 1 = 2 - \frac{1}{2}(1+\cos 2x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x.$
d) $f(x) = \cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$ wegen $\cos 3x + i\sin 3x = e^{i3x} = (e^{ix})^3 = (\cos x + i\sin x)^3$
$= \cos^3 x + 3\cos^2 x i\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x = \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x) + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$
$= 4\cos^3 x - 3\cos x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$. Vergleich der Realteile ergibt $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
¡hr¿