Aufgabe 26: f ist gerade $\Rightarrow b_k = 0$ $\quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(t)\ dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\ dt = \frac{1}{\pi}$. SKIZZE

$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(t)\ dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \cos kt\ dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(k-1)t + \cos(k+1)t)\ dt$

$a_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\ dt = \frac{1}{\pi}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$

Für $k > 1$ gilt $a_k = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k-1}\sin(k-1)t + \frac{1}{k+1}\sin(k+1)t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

Für ungerades k sind $k-1$ und $k+1$ gerade und $a_k = 0$. Für gerades k, $k = 2l, l = 1, 2, 3, ...$ ist

$a_{2l} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2l-1}\sin(2l-1)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2l+1}\sin(2l+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{l+1}}{2l-1} + \frac{(-1)^l}{2l+1}\right) = \frac{(-1)^l}{\pi}(\frac{1}{2l+1} - \frac{1}{2l-1})$

$= (-1)^{l-1}\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2l-1)(2l+1)}$

$f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_4\cos 4x + a_6\cos 6x + ... = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{\pi}\sum\limits_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{(2l-1)(2l+1)}\cos 2lx$

$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} - \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} - +...\right)$

Aufgabe 27: a) f ist ungerade $\Rightarrow a_k = 0,\ k = 0, 1, 2, 3, ...$ $\quad b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi t - t^2)\sin kt\ dt$

$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[(\pi t - t^2)(-\frac{\cos kt}{k})\right]_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}(\pi - 2t)\frac{\cos kt}{k}\ dt\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{\left[(\pi - 2t)\frac{\sin kt}{k^2}\right]_0^{\pi} + 2\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin kt}{k^2}\ dt\right\}$

$= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{\cos kt}{k^3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{k^3}(1 - \cos k\pi) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{k^3}(1 - (-1)^k) = \frac{8}{\pi}\frac{1}{k^3}$ für $k = 1, 3, 5, 7...;$ $\quad = 0$ für $k = 2, 4, 6, ..$

$f(x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + ...\right)$

b) $x = \frac{\pi}{2} : f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}(\pi - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4};$ $\quad \frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - +...);$ $\quad \frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + -...$

Aufgabe 28: Für die Koeffizienten $c_\nu, \nu \in \mathbb{Z}$, der komplexen Fourierreihe von f gilt

$c_\nu = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i\nu x}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{i(1-\nu)x}dx.$ Für $\nu \neq 1$ ist also $c_\nu = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(1-\nu)x}}{i(1-\nu)}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi i(1-\nu)}\left((-1)^{1-\nu} - 1\right).$

Für $\nu = 1$ ist $c_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} dx = \frac{1}{2}.$ $\Rightarrow f(x) = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu e^{i\nu x} = ...\frac{-1}{3\pi i}e^{-2ix} + 0\cdot e^{-ix} - \frac{1}{\pi i} + \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{\pi i}e^{2ix} + ...$

$Ref(x) = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} Re(c_\nu e^{i\nu x} = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}}\underbrace{\frac{1}{2\pi(i-\nu)}\left((-1)^{1-\nu} - 1\right)\sin(\nu x)}_{:=a_\nu} + \frac{1}{2}\cos x$ $\quad$ (c_ν für $\nu \neq 1$ rein imaginr!).

$= \frac{1}{2}\cos x + \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}/\{1\}}(a_\nu + a_{-\nu}) + \underbrace{a_{-1}}_{=0} + \underbrace{a_0}_{=0} = \frac{1}{2}\cos x + \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\frac{(-1)^{1-\nu}-1}{2\pi(1-\nu)} - \frac{(-1)^{1+\nu}-1}{2\pi(1+\nu)}\right)\sin\nu x$

wegen $\sin(-\nu x) = -\sin(\nu x)$! Mit $(-1)^{1-\nu} - 1 = (-1)^{1+\nu} - 1 = \begin{cases} 0 & : \nu \text{ ungerade} \\ -2 & : \nu \text{ gerade} \end{cases}$ folgt

$Ref(x) = \frac{1}{2}\cos x + \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\frac{-1}{\pi(1-2\nu)} - \frac{-1}{\pi(1+2\nu)}\right)\sin(2\nu x) = \frac{1}{2}\cos x + \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\frac{-4\nu}{\pi(1-4\nu^2)}\sin(2\nu x)$. Analog für Imf(x):

$Imf(x) = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} Im(c_\nu e^{i\nu x}) = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}}\underbrace{\frac{1}{2\pi(i-\nu)}\left((-1)^{1-\nu} - 1\right)\cos(\nu x)}_{:=a_\nu} + \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}\sin x + \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}/\{1\}}(a_\nu + a_{-\nu})$

$+ \underbrace{a_{-1}}_{=0} + \underbrace{a_0}_{=\frac{2}{2\pi}} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{\pi(1-2\nu)} + \frac{1}{\pi(1+2\nu)}\right)\cos(2\nu x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\frac{2}{\pi(1-4\nu^2)}\cos(2\nu x).$

Aufgabe 29: Wir berechnen die Fourierkoeffizienten von f:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_L^{\pi} dx = \frac{1}{2} - \frac{L}{2\pi},$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,f(x)\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\int_L^{\pi}\cos(kx)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{\pi k}\,\sin(kx)\right]_L^{\pi} \;=\; -\frac{\sin(kL)}{\pi k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\,f(x)\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\int_L^{\pi}\sin(kx)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{\pi k}\,\cos(kx)\right]_L^{\pi} \;=\; \frac{\cos(kL) - (-1)^k}{\pi k}. \end{aligned}$$

Es folgt nun durch Auswertun von $f(0)$, dass

$$0 = a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kL)}{\pi k} = \frac{1}{2} - \frac{L}{2\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kL)}{\pi k}.$$

Also ist der Reihenwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kL)}{k} = \frac{\pi - L}{2}.$$

Aufgabe 30: a) Wir machen für die Fourier-Reihe von $\hat{f}$ den Ansatz $\hat{f}(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx)$. (Beachte, dass $\hat{f}$ als Produkt zweier gerader Funktionen wiederum gerade ist, also werden in der Fourier-Reihe keine sin-Terme auftreten.) Nach der bekannten Formel für die Koeffizienten ist für $n \geq 1$: $A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(Nx) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{2} (\cos((N+n)x) + \cos((N-n)x)) dx$, wobei wir im letzten Schritt ein Additionstheorem verwendet haben. Ziehen wir das Integral auseinander, so erhalten wir

$$A_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos((N+n)x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos((N-n)x) dx \right).$$

Man erkennt unschwer, dass das linke Integral gerade der $(N+n)$-te Fourierkoeffizient von f ist, also den Wert a_{n+N} hat. Ebenso ist das rechte Integral gerade der $|n-N|$-te Fourierkoeffizient von f (die Betragsstriche brauchen wir, weil es keine Fourierkoeffizienten mit negativem Index gibt und $\cos((N-n)x) = \cos(|N-n|x)$ wegen der Symmetrie des Cosinus gilt).
Einzige Ausnahme ist der Fall $n = N$. Das linke Integral ist dann gleich dem Koeffizienten a_{2N} von f, das rechte ist *das Doppelte* des Koeffizienten a_0, weil a_0 bei unserer Definition der Fourierkoeffizienten mit $1/2\pi$ statt mit $1/\pi$ normiert wird.
Also gilt $A_n = \frac{1}{2}(a_{n+N} + a_{|n-N|})$. Für $n = N$ haben wir $A_N = \frac{1}{2}(a_{2N} + 2a_0)$ und für $n = 0$ haben beide Integrale den (identischen) Wert a_N. Allerdings muss zur Berechnung von A_0 die Formel der A_n noch mit einem Faktor $1/2$ versehen werden, so dass $A_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(a_N + a_N) = \frac{1}{2}a_N$ gilt.

b) Für $f(x) = |x|$ haben wir $b_n = 0,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_0 = \pi/2$, $a_n = 2((-1)^n - 1)/(\pi n^2)$. Also ist für die Fourierreihe von $\hat{f}$ der Koeffizient $A_0 = \frac{1}{2}a_{40} = 0$, $A_n = \frac{1}{2}(a_{n+40} + a_{|n-40|}) = \frac{(-1)^{n+40}-1}{\pi(n+40)^2} + \frac{(-1)^{|n-40|}-1}{\pi(n-40)^2} = ((-1)^n - 1)\frac{(n+40)^2+(n-40)^2}{\pi(n+40)^2(n-40)^2}$ für $n \neq 40$. Für $n = 40$ schließlich ergibt sich $A_n = \frac{1}{2}(a_{80} + 2a_0) = \pi/2$.
¡h