Aufgabe 31: Wir machen den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$. Daraus folgt $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ sowie $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ und $y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}$. Wenn man dies in die Differentialgleichung einsetzt, bekommt man:

$$\lambda^3 e^{\lambda x} + 3\lambda^2 e^{\lambda x} + 4\lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0.$$

Wir teilen alles durch $e^{\lambda x} \neq 0$ und erhalten die <u>Charakteristische Gleichung</u>:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0,$$

deren Nullstellen wir nun bestimmen mssen. Scharfes Hinsehen liefert $\lambda_1 = -1$ als erste Nullstelle. Wir dividieren sie ab und bestimmen die Nullstellen des verbleibenden quadratischen Terms mit der Mitternachtsformel:

$$\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+2 : (\lambda+1) = \lambda^2+2\lambda+2 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(-2\pm\sqrt{4-8}) = -1\pm i \qquad \lambda_2 = -1+i,\ \lambda_3 = -1-i \Rightarrow$$

Die allgemeine Lösung in komplexer Form ist also $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{(-1+i)x} + c_3 e^{(-1-i)x}$.
Schöner ist es, die Lösung auch reell anzugeben. Wir mssen also aus den beiden komplexen Lsungen zwei reelle basteln. Dazu schreiben wir die komplexen Grundlsungen zunchst mit Hilfe der Eulerschen Formel etwas um:

$$\begin{aligned} y_2(x) = e^{(-1+i)x} = e^{-x}e^{ix} &= e^{-x}(\cos x + i\sin x) && (1)\\ y_3(x) = e^{(-1-i)x} = e^{-x}e^{-ix} = e^{-x}(\cos(-x) + i\sin(-x) &= e^{-x}(\cos x - i\sin x) && (2) \end{aligned}$$

Bei Addition von (1) und (2) hebt sich der Sinus-Term weg und wir erhalten $\tilde{y}_2(x) = y_2(x) + y_3(x) = 2e^{-x}\cos x$ als neue reelle Lsung, bzw. nach Division durch 2: $\hat{y}_2(x) = e^{-x}\cos x$.
Durch Subtraktion von (1) und (2) entfllt der Cosinus-Term, und es ergibt sich $\tilde{y}_3(x) = y_2(x) - y_3(x) = 2ie^{-x}\sin x$ als weitere reelle Lsung, bzw. nach Division durch $2i$: $\hat{y}_3(x) = e^{-x}\sin x$.
Insgesamt ist die gesuchte Lsung also:

$$\underline{y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x}\cos(x) + C_3 e^{-x}\sin(x)}$$

.

Aufgabe 32: Der Exponentialansatz $u(x) = e^{\lambda x}$ liefert wie oben das charakteristische Polynom

$$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 4 = (\lambda+i)(\lambda-i)(\lambda-2)(\lambda+2) \Rightarrow$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$u(x) = c_1 e^{-ix} + c_2 e^{ix} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x},$$

oder reell (die reellen Lsungen konstruiert man aus den komplexen immer nach demselben Schema wie oben):

$$u(x) = C_1\sin(x) + C_2\cos(x) + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}.$$

Die Konstanten ergeben sich nun aus den Anfangswerten, d.h. in den Werten, die fr $x = 0$ fr u und seine Ableitungen vorgesehen sind. Wir haben

$$\begin{aligned} u(0) = C_1\sin(0) + C_2\cos(0) + C_3 e^{2\cdot 0} + C_4 e^{-2\cdot 0} &= 12 && (3)\\ u'(0) = C_1\cos(0) - C_2\sin(0) + 2C_3 e^{2\cdot 0} - 2C_4 e^{-2\cdot 0} &= 0 && (4)\\ u''(0) = -C_1\sin(0) - C_2\cos(0) + 4C_3 e^{2\cdot 0} + 4C_4 e^{-2\cdot 0} &= 33 && (5)\\ u'''(0) = -C_1\cos(0) + C_2\sin(0) + 8C_3 e^{2\cdot 0} - 84C_4 e^{-2\cdot 0} &= -10 && (6) \end{aligned}$$

Einfaches Ausrechnen führt auf das LGS

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 4 & 4\\ -1 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\\ 0\\ 33\\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 2\\ C_2 = 3\\ C_3 = 4\\ C_4 = 5 \end{matrix},$$

Damit lautet die Lösung des AWPs:

$$\underline{u(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x) + 4e^{2x} + 5e^{-2x}}.$$

Aufgabe 33: Der Ansatz $y(x) = x^k$, also $y'(x) = kx^{k-1}$ und $y''(x) = k(k-1)x^{k-2}$ sowie $y'''(x) = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$ wird in die Differentialgleichung eingesetzt:

$$x^3k(k-1)(k-2)x^{k-3}-8x^2k(k-1)x^{k-2}+26xkx^{k-1}-36x^k = k(k-1)(k-2)x^k-8k(k-1)x^k+26kx^k-36x^k = 0.$$

Wir dividieren durch x^k und erhalten so die charakteristische Gleichung

$$k(k-1)(k-2) - 8k(k-1) + 26k - 36 = \ldots = k^3 - 11k^2 + 36k - 36 = 0$$

mit den Lösungen $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 6$. Also lst jede der drei Funktionen aus $L := \{x^2, x^3, x^6\}$ die gegebene Differentialgleichung, und die allgemeine Lösung ist

$$\underline{y(x) = C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^6}.$$

Aufgabe 34: Der Potenzansatz $u = x^\lambda$ liefert wie oben die charakteristische Gleichung

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 2\lambda(\lambda-1) + 5\lambda - 5 = (\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) \stackrel{!}{=} 0.$$

Also haben wir die Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$ und erhalten damit als Lsungen

$$u_1(x) = x,\ u_2(x) = x^{2+i},\ u_3(x) = x^{2-i}.$$

Wir wollen wieder reelle Lsungen haben und wenden die Eulersche Formel an:

$$\begin{aligned} x^{2+i} = x^2 \cdot x^i = x^2 \cdot e^{i\ln x} &= x^2(\cos(\ln x) + i\sin(\ln x)) \\ x^{2-i} = x^2 \cdot x^{-i} = x^2 \cdot e^{-i\ln x} = x^2(\cos(-\ln x) + i\sin(-\ln x)) &= x^2(\cos(\ln x) - i\sin(\ln x)). \end{aligned}$$

Durch Addition erhlt man $\tilde{u}_2(x) = 2x^2(\cos(\ln x)$ als mgliche relle Lsung, durch Subtraktion $\tilde{u}_3(x) = 2ix^2(\sin(\ln x)$. Division durch 2 bzw. $2i$ ergibt also zwei reelle Grundlsungen. Durch Linearkombination erhalten wir die allgemeine Lsung

$$\underline{u(x) = C_1x + C_2x^2\cos(\ln x) + C_3x^2\sin(\ln x)}.$$

Aufgabe 35: $u(x) = e^{x^2}$, also $u'(x) = 2xe^{x^2}$ und $u''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$. Einsetzen in die Gleichung liefert

$$2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - 4x^2e^{x^2} - 2e^{x^2} = 0,$$

also ist u Lösung der DGL.
Der Reduktionsansatz $u_2(x) = v(x)e^{x^2}$ liefert $u_2'(x) = v'(x)e^{x^2} + v(x)2xe^{x^2}$ und $u_2''(x) = v''(x)e^{x^2} + 4xv'(x)e^{x^2} + v(x)\left[2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}\right]$. Setzt man dies in die ursprüngliche DGL ein, so erhält man

$$v''(x)e^{x^2} + v'(x)2xe^{x^2} = 0.$$

Wir setzen $w = v'$ und haben $w'(x)e^{x^2} + 2xw(x)e^{x^2} = 0$ bzw. $w'(x) + 2xw(x) = 0$. Dies ist eine DGL in getrennten Veränderlichen, die wir folgendermaßen lösen:

$$\frac{dw}{dx} = -2xw, \quad \text{also} \quad -\frac{dw}{w} = 2xdx.$$

Integration auf beiden Seiten liefert $-\ln w = x^2$ (Integrationskonstante willkürlich zu 0 gesetzt), also $w = e^{-x^2}$. Da w ja die Ableitung von v war, bekommen wir v durch Integration von w, also $v = \int w(x)dx = \int e^{-x^2}dx$. Dieses letzte Integral ist nicht elementar lösbar. Wir haben also die zweite Lsung

$$\underline{u_2(x) = u(x) \cdot v(x) = e^{x^2} \int e^{-x^2}dx}.$$

¡hr¿¡b¿Timeout. This