Aufgabe 36: Der Exponentialansatz $u(x) = e^{\lambda x}$ liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1) \stackrel{!}{=} 0$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 2$ (doppelt) und $\lambda_2 = 1$. Somit sind $u_1(x) = e^x,\ u_2(x) = e^{2x}$ liniear unabhngige Lsungen der homogenen Dgl. Da 2 eine doppelte Nullstelle ist, haben wir nur zwei (statt drei) verschiedene Lösungen.
Reduktionsansatz für $u_3:\ u_3(x) = e^{2x}v$. (Wir müssen e^{2x} nehmen, da 2 eine doppelte NST ist!). Also

$$u_3'(x) = 2e^{2x}v + e^{2x}v', \quad u_3''(x) = 4e^{2x}v + 4e^{2x}v' + e^{2x}v'', \quad u_3'''(x) = 8e^{2x}v + 12e^{2x}v' + 6e^{2x}v'' + e^{2x}v'''.$$

Einsetzen in die Dgl. liefert die reduzierte Dgl. $v''' + v'' = 0$, mit $w = v''$ also $w + w' = 0$. Durch Trennung der Vernderlichen oder durch scharfes Hinsehen erkennt man, dass eine Lösung $w = e^{-x}$ ist (oder beliebige Vielfache, aber wir suchen ja nur *eine* Lsung). Also

$$v' = \int w dx = -e^{-x} + C, \quad v = \int v' dx = e^{-x} + Cx, \quad \text{somit} \quad u_3 = e^x + Cxe^{2x}.$$

Da e^x ohnehin Lösung der homogenen DGL ist, haben wir also die drei Grundlösungen $u_1(x) = e^x,\ u_2(x) = e^{2x},\ u_3(x) = xe^{2x}$. Um zu zeigen, dass diese Funktionen ein Fundamentalsystem bilden, mssen wir beweisen, dass die Funktionen *linear unabhngig* im folgenden Sinne sind:

$$a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3 \equiv 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Mit der 0 auf der rechten Seite ist nicht die Zahl 0, sondern die *Nullfunktion* gemeint. Mit anderen Worten: die einzige Mglichkeit, aus diesen drei Funktionen die Nullfunkton durch Linearkombination zu erzeugen, darf diejenige sein, bei der $a = b = c = 0$ ist.
Wir zeigen dies, indem wir fr x drei beliebige, aber einigermaen geschickt gewhlte Werte einsetzen (wir nehmen $0, 1, -1$, weil es sich damit so schn rechnet!). Da die Funktion $a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3$ berall verschwinden soll, muss sie insbesondere auch fr diese drei Werte 0 sein. Wir erhalten also ein homogenes LGS mit drei Gleichungen fr drei Unbekannte und hoffen, dass dessen einzige Lsung die triviale $a = b = c = 0$ ist:

$$\begin{array}{lcl} a\,e^0 + b\,e^{2\cdot 0} + c\,0e^{2\cdot 0} & = & 0 \\ a\,e^1 + b\,e^{2\cdot 1} + c\,1e^{2\cdot 1} & = & 0 \\ a\,e^{-1} + b\,e^{2\cdot(-1)} - c\,e^{2\cdot(-1)} & = & 0 \end{array} \to \begin{array}{lcl} a + b & = & 0 \\ a\,e + b\,e^2 + c\,e^2 & = & 0 \\ a\,e^{-1} + b\,e^{-2} - c\,e^{-2} & = & 0 \end{array} \to \begin{array}{lcl} a + b & = & 0 \\ a\,(e + e^3) + 2b\,e^2 & = & 0 \\ a\,e^{-1} + b\,e^{-2} - c\,e^{-2} & = & 0 \end{array}.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die dritte Gleichung mit e^4 multipliziert und zur Zweiten addiert. Aus den beiden ersten Gleichungen folgt sofort $a = b = 0$, und damit aus der dritten $c = 0$, d.h. wir knnen die Nullfunktion nur erhalten, wenn alle Koeffizienten 0 sind. Damit sind die Grundlsungen linear unabhngig sind, sie bilden also ein Fundamentalsystem

$$\underline{F = \{e^x, e^{2x}, xe^{2x}\}}.$$

Aufgabe 37: a) Laut Hinweis ist $y_1(x) = x$ eine Lsung der homogenen DGL. Wir machen also den Reduktionsansatz

$$y(x) = xu(x), \quad y'(x) = u(x) + xu'(x), \quad y(x)'' = 2u'(x) + xu''(x).$$

Einsetzen und Vereinfachen ergibt die reduzierte Dgl. $u''(x) = 0$. Durch zweimaliges Integrieren oder scharfes Hinsehen erhlt man $u(x) = cx + d,\ c, d$ als Lsung (diejenigen Funktionen, die nach zweimaligem Differenzieren verschwinden, sind gerade die Polynome 1. Ordnung!). Mit diesem Zwischenergebnis folgt $y(x) = xu(x) = cx^2 + dx$ als zweite Lsung aus dem Reduktionsansatz. Die Funktion $y_1(x) = x$ ist schon bekannt, daher ist $y_2(x) = x^2$ eine weitere Grundlösung des homogenen Systems. Also ist die allgemeine Lsung der homogenen DGL:

$$\underline{y_h(x) = C_1 x + C_2 x^2 \quad \text{mit} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}$$

b) Da es sich um eine Eulersche DGL handelt, machen wir den Ansatz $y = x^\alpha$, also $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ und $y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$. Einsetzen in die Differentialgleichung $Ly = 0$ und Ausklammern von x^α führen auf

$$0 = x^\alpha(2 - 2\alpha + \alpha(\alpha - 1)) = x^\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)$$

und daraus $\alpha = 1$ oder $\alpha = 2$. Somit erhalten wir die allg. Lösung durch Linearkombiation der Grundlösungen x^1 und x^2, also $\underline{y_h(x) = C_1x + C_2x^2}$ (siehe oben!).

c) Variation der Konstanten bedeutet, die eigentlich konstanten Koeffizienten in der allgemeinen Lsung y_h nun als Funktionen von x aufzufassen. Dies liefert fr y_p den Ansatz $y_p(x) = c_1(x)x + c_2(x)x^2$. Diesen mssen wir zweimal ableiten

$$y_p'(x) = c_1'(x)x + c_1(x) + c_2'(x)x^2 + 2c_2(x)x \quad y_p''(x) = c_1''(x)x + 2c_1'(x) + c_2''(x)x^2 + 4c_2'(x)x + 2c_2(x).$$

Einsetzen führt auf

$$\left.\begin{array}{l} c_1'x + c_2'x^2 = 0 \\ c_1' + c_2'2x = x\ln x \end{array}\right\} \quad c_1' = -x\ln x \quad \text{und} \quad c_2' = \ln x.$$

Mittels partieller Integration erhalten wir daraus

$$c_1 = \frac{x^2}{4}(1 - 2\ln x) \quad \text{und} \quad c_2 = x\ln x - x.$$

Also haben wir die partikulre Lsung

$$\underline{y_p(x) = \frac{x^3}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^3}.$$

d) Die allgemeine Lsung ist nun $y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{x^3}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^3 + C_1x + C_2x^2$. Wir mssen nun C_1 und C_2 so bestimmen, dass die Anfangsbedingugnen erfllt sind. Dazu bentigen wir zwei Gleichungen. Die erste ergibt sich aus $y(1) = 1$, die zweite aus $y'(1) = 1$. Wir brauchen also noch die Ableitung $y'(x) = \frac{3x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{2} - \frac{9}{4}x^2 + C_1 + 2C_2x$ der allgemeinen Lsung. Nun knnen wir jeweils $x = 1$ einsetzen und erhalten die Bedingungen

$$\begin{aligned} 1 &= y(1) = -\frac{3}{4} + C_1 + C_2 \\ 1 &= y'(1) = -\frac{7}{4} + C_1 + 2C_2 \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort $C_2 = 1$ und $C_1 = 3/4$. Damit ist die Lsung des AWP

$$y(x) = \frac{x^3}{4}(2\ln x - 3) + \frac{3}{4}x + x^2.$$

Aufgabe 38: Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda - 3)^2 = 0$$

Wir haben also $\lambda = 0$ als einfache und $\lambda = 3$ als doppelte Nullstelle. Bekanntlich ist dann die Lsung der homogenen DGL

$$y_h = C_1 + C_2e^{3x} + C_3xe^{3x}.$$

Wir mssen nun fr jeder der Strfunktionen eine partikulre Lsung y_p bestimmen. Wir geben im Folgenden nur y_p an, die allgemeine Lsung ergibst sich dann jeweils als Summe $y = y_p + y_h$ mit obigem y_h.

a) Die rechte Seite ist ein Polynom vom Grad 0, also mssten wir $y_a = A$ ansetzen. Nun prfen wir auf Resonanz: Die Funktion $y(x) \equiv 9$ ist selbst Lösung der homog. DGL. Damit haben wir Resonanz (alternativ erkennt man das daran, dass 0 eine Lsung der charakteristischen Gleichung ist), und der obige Ansatz versagt. Wir „retten" ihn, indem wir ihn mit x multiplizieren: Ansatz $y_a(x) = xA \Rightarrow A = 1 \Rightarrow \underline{y_a(x) = x}$.

b) Die rechte Seite ist ein Polynom vom Grad 1, also mssten wir $y_b(x) = Bx + C$ ansetzen. Wir prfen auf Resonanz und schreiben die rechte Seite in der Form xe^{0x}. Also haben wir hier $a = 0$. Das dies eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, haben wir also Resonanz, daher muss $y_b(x) = Bx^2 + Cx$ angesetzt werden. Einsetzen und Koeffizientenvergleich ergibt

$$-12B + 18Bx + 9C = x \Rightarrow B = 1/18, C = 2/27 \Rightarrow \underline{y_b(x) = \frac{1}{18}x^2 + \frac{2}{27}x}.$$

c) Der Grund-Ansatz lautet $y_c(x) = Ce^x$. Wir prfen auf Resonanz. $a = 1$ ist keine Nullstelle des Charakteristischen Polynoms, also keine Resonanz! Wir erhalten:

$$4Ce^x \stackrel{!}{=} e^x \Rightarrow C = 1/4 \Rightarrow \underline{y_c(x) = \frac{1}{4}e^x}.$$

d) Hier ist die rechte Seite vom Typ „Polynom ersten Grades mal e-Funktion“. Also mssten wir $y_d(x) = (Ax + B)e^{3x}$ ansetzen. Prfung auf Resonanz: $a = 3$ ist sogar doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms, daher mssen wir den Ansatz mit x^2 multiplizieren, um ihn zu retten. Damit lautet der Ansatz $y_d(x) = (Ax^3 + Bx^2)e^{3x}$, also $y_d'(x) = (3Ax^3 + (3A + 3B)x^2 + 2Bx)e^{3x}$ und $y_d''(x) = (9Ax^3 + (18A + 9B)x^2 + (6A + 12B)x + 2B)e^{3x}$ sowie $y_d'''(x) = (27Ax^3 + (81A + 27B)x^2 + (54A + 54B)x + 6A + 18B)e^{3x}$. Dies in die DGL eingesetzt ergibt

$$(18Ax + (6A + 6B))e^{3x} \stackrel{!}{=} xe^{3x},$$

und daraus durch Koeffizientenvergleich $18A = 1$ sowie $6A + 6B = 0$, also $A = 1/18$ und $B = -1/18$. Also lautet die partikulre Lsung $\underline{y_d(x) = \frac{1}{18}(x^3 - x^2)e^{3x}}$.

e) Hier ist die rechte Seite eine Summe aus mehreren einzelnen Strfunktionen. In diesem Fall betrachtet man jeden Summanden getrennt, bestimmt je eine partikulre Lsung und addiert diese dann. In diesem Beispiel haben wir die Summanden schon in den Aufgabenteilen a), b) und d) behandelt. Also ist

$$y_p = y_a + 2y_b + 3y_d = \underline{x + \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{27}x + (\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2)e^{3x}}.$$

Aufgabe 39: a) Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$$

mit der dreifachen Nullstelle $\lambda = -1$. Damit habe wir die folgende allgemeine Lsung der homogenen DGL

$$\underline{y_h = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x}}.$$

b) Die rechte Seite ist die Summe zweier Standardtypen. Fr den Summanden x macht man den Ansatz $y_1(x) = Ax + B$, es tritt keine Resonanz auf. Der Summand $6e^{-x}$ fhrt eigentlich auf den Ansatz $y_2(x) = Ce^{-x}$, weil aber -1 eine 3-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, mssen wir diesen mit x^3 multiplizieren, um ihn zu retten. Also $y_2(x) = Cx^3e^{-x}$. Insgesamt machen wir also den Ansatz $y_p(x) = A + Bx + Cx^3e^{-x}$. Die Ableitungen sind

$$y_p'(x) = B + C(3x^2 - x^3)e^{-x},\ y_p''(x) = C(6x - 6x^2 + x^3)e^{-x},\ y_p'''(x) = C(6 - 18x + 9x^2 - x^3)e^{-x}.$$

Einsetzen liefert nach Vereinfachen

$$e^{-x}6C + A + 3B + Bx \stackrel{!}{=} x + 6e^{-x},$$

also durch Koeffizientenvergleich $A = -3, B = 1, C = 1$.
Die allgemeine Lösung der DGL ist folglich

$$y(x) = \underline{C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x} - 3 + x + x^3e^{-x}}.$$

Aufgabe 40: Wir bestimmen zunchst die allgemeine Lsung der homogenen DGL. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0$, also

$$\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{-3} = 2 \pm i\sqrt{3} \Rightarrow y_1(x) = e^{2x}\cos(\sqrt{3}x),\ y_2(x) = e^{2x}\sin(\sqrt{3}x).$$

Damit haben wir $y_{hom}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Nun wenden wir uns einer partikulren Lsung zu. Die rechte Seite ist keine LSG der homog. DGL, also haben wir keine Resonanz (alternativ sieht man das daran, dass $\lambda = 1 + i$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist). Der Ansatz lautet in diesem Fall $y_p(x) = (A\sin x + B\cos x)e^x$. Einsetzen in die DGL liefert

$$[(2B + 3A)\sin x + (3B - 2A)\cos x]\, e^x \stackrel{!}{=} e^x \sin x\ \Rightarrow A = \frac{3}{13},\ B = \frac{2}{13},\ y_p(x) = \frac{1}{13}e^x(3\sin x + 2\cos x).$$

Also ist die allgemeine Lsung

$$y(x) = \frac{1}{13}e^x(3\sin x + 2\cos x) + c_2e^{2x}\cos(\sqrt{3}x) + c_1e^{2x}\sin(\sqrt{3}x).$$

Wir mssen nun noch die Anfangsbedingungen in y und y' einsetzen und erhalten $c_1 = 0$ und $c_2 = 4/13$, also

$$\underline{y(x) = \frac{1}{13}e^x(3\sin x + 2\cos x) + \frac{4}{13}e^{2x}\cos(\sqrt{3}x)}.$$

¡hr¿¡b¿Timeout. This is only a partial webpage¡/b¿¡hr¿¡/body¿¡/html¿