Aufgabe 41: a) Das charakteristische Polynom ergibt sich zu

$$p(\lambda) = -15 + 3\lambda + \lambda(\lambda - 1) = -15 + 2\lambda + \lambda^2 = (\lambda + 1)^2 - 16 = (\lambda - 3)(\lambda + 5)$$

mit den beiden einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -5$. Damit erhalten wir das reelle Fundamentalystem

$$\{x^3, x^{-5}\}.$$

b) Den Ansatz für die partikuläre Lösung erhalten wir durch Variation der Konstanten aus der homogenen Lösung $u_h(x) = c_1x^3 + c_2x^{-5}$:

$$u_p(x) = c_1(x)x^3 + c_2(x)x^{-5}$$

Durch ableiten erhalten wir

$$\begin{aligned} u_p'(x) &= \underbrace{c_1'(x)x^3 + c_2'(x)x^{-5}}_{\overset{!}{=}0 \text{ 1. Bedingung}} + 3c_1(x)x^2 - 5c_2(x)x^{-6} \\ u_p''(x) &= 3c_1'(x)x^2 - 5c_2'(x)x^{-6} + 6c_1(x)x + 30c_2(x)x^{-7} \end{aligned}$$

Die zweite Bedingung erhalten wir durch Einsetzen der partikulären Lösung in die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 8x^{-3} &\overset{!}{=} -15u_p(x) + 3xu_p'(x) + x^2u_p^{(2)}(x) \\ &= -15c_1(x)x^3 - 15c_2(x)x^{-5} + 9x^3c_1(x) - 15x^{-5}c_2(x) \\ &\quad + 3c_1'(x)x^4 - 5c_2'(x)x^{-4} + 6x^3c_1(x) + 30x^{-5}c_2(x) \\ &= 3c_1'(x)x^4 - 5c_2'(x)x^{-4} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgendes System für c_1' und c_2'

$$\begin{aligned} c_1'(x)x^3 + c_2'(x)x^{-5} &= 0 \\ 3c_1'(x)x^4 - 5c_2'(x)x^{-4} &= 8x^{-3} \end{aligned}$$

Einsetzen der ersten Bedingung in die Zweite liefert $c_2'(x) = -x$ und damit $c_2(x) = -x^2/2$. Diese ergibt $c_1'(x) = x^{-7}$ und damit $c_1(x) = -x^{-6}/6$. Die partikuläre Lösung lautet damit

$$u_p(x) = -\frac{1}{6}x^{-6}x^3 - \frac{1}{2}x^2x^{-5} = -\frac{1}{6}(x^{-3} + 3x^{-3}) = -\frac{2}{3}x^{-3}$$

und wir erhalten für die allgemeine Lösung:

$$\underline{u(x) = u_h(x) + u_p(x) = c_1x^3 + c_2x^{-5} - \frac{2}{3}x^{-3}.}$$

Aufgabe 42: Wir setzen eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt 0 an:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2}$$

Diesen Ansatz wenden wir auf die Differentialgleichung an und bringen alle Potenzen zum gleichen Exponenten n, damit wir sie zusammenfassen können:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} y'' - 2xy - 2y \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_nx^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_nx^n \\ &= \underbrace{2 \cdot 1 \cdot c_2 - 2c_0}_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2+2n)c_n\right]x^n \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt nun auf

$$\begin{aligned} c_2 &= c_0 \\ c_{n+2} &= \frac{2}{(n+2)} c_n \end{aligned}$$

und mit den Anfangswerten sehen wir, dass es nur gerade Potenzen gibt, die Koeffizienten der ungeraden sind 0:

$$c_0 = 1,\, c_2 = 1,\, c_4 = \frac{2^1}{4},\, c_6 = \frac{2^2}{4\cdot 6},\, c_8 = \frac{2^3}{4\cdot 6\cdot 8}$$

Somit hat c_{2n} den Zähler 2^{n-1}, sowie den Nenner $\frac{1}{2}\cdot 2^n n!$. Also ist unsere Vermutung für die geschlossene Form:

$$c_{2n} = \frac{2^{n-1}}{\frac{1}{2}2^n n!} = \frac{1}{n!}$$

Dies beweisen wir mit vollständiger Induktion:
$k = 0, 1$: $c_0 = 1$ und $c_2 = 1$ stimmt.
$k \to k+1$: Sei $c_{2k} = \frac{1}{k!}$, wir beweisen nun, dass $c_{2(k+1)} = \frac{1}{(k+1)!}$. Laut Rekursion gilt $c_{2k+2} = \frac{2}{2k+2} c_{2k}$. Setzen wir nun die Induktionsannahme ein, unter Beachtung der korrekten Indices, so erhalten wir $c_{2(k+1)} = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{k!} = \frac{1}{(k+1)!}$ und somit ist die Vermutung bewiesen. Insgesamt lautet die Lösung also

$$\underline{y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k}}\,.$$

Für den Konvergenzradius betrachten wir den Quotienten zweier aufeinander folgender Monome

$$\frac{|c_{2n+2}||x^{2n+2}|}{|c_{2n}||x^{2n}|} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}|x^{2n+2}|}{\frac{1}{n!}|x^{2n}|} = \frac{1}{n+1}|x^2|\,.$$

Der Konvergenzradius ist bestimmt durch $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}|x^2| < 1$. Hier geht aber $\frac{1}{n+1}$ gegen 0, also ist x beliebig und der Konvergenzradius unendlich: Diese Potenzreihe <u>konvergiert auf der ganzen reellen Achse.</u>

Aufgabe 43: Wie blich macht man den Ansatz $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ und setzt ihn in die DGL ein:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-1} + 4\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + 3\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 3.$$

„Größter Exponent“ ist k, daher Indexverschiebung in den beiden ersten Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)k c_{k+1} x^k + 4\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k + 3\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 3$$

bzw. zusammengefasst:

$$4c_1 + 3c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k \left[(k+1)k c_{k+1} + 4(k+1)c_{k+1} + 3c_k\right] = 3.$$

Koeffizientenvergleich: $4c_1 + 3c_0 = 3$ und $(k+1)kc_{k+1} + 4(k+1)c_{k+1} + 3c_k = 0$ für $k = 1, 2, \ldots$ also die Rekursionsformel

$$\underline{c_{k+1} = \frac{-3}{(k+1)(k+4)} c_k,\ k = 1, 2\ldots \qquad (*).}$$

Zu einer Rekursionsformel gehren immer auch die „Startwerte“, hier also mit den Anfangsbedingungen $\underline{c_0 = u(0) = 2}$ und folglich $\underline{c_1 = \frac{1}{4}(3 - 3c_0) = -\frac{3}{4}}$.
Also ist die gesuchte Lsung

$$u(x) = 2 - \frac{3}{4}x + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k \quad \text{mit} \quad c_k \quad \text{aus} \quad (*).$$

Konvergenz: Das Quotientenkriterium liefert absolute Konvergenz, falls $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right||x|<1$.
Hier ist

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right||x| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{-3}{(k+1)(k+4)}c_k}{c_k}\right||x| = \lim_{k\to\infty}\frac{3}{(k+1)(k+4)}|x| = 0$$

für jedes $x\in\mathbb{R}$. Die Reihe konvergiert also absolut auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 44: Wir setzen eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt 1 an:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-1)^{n-1} \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(x-1)^{n-2}$$

Diesen Ansatz wenden wir auf die Differentialgleichung an und bringen alle Potenzen zum gleichen Exponenten n, damit wir sie zusammenfassen können, wobei wir die Umformung $2x-x^2=-(x-1)^2+1$ verwenden:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} (-(x-1)^2+1)-3)y''-(x-1)y' \\
&= -\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(x-1)^n+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(x-1)^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-1)^n \\
&= -\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n-\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-1)^n \\
&= \underbrace{2c_2}_{n=0}+\underbrace{(6c_3-c_1)(x-1)}_{n=1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2}-n^2c_n\right](x-1)^n
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir:

$$\begin{aligned}
c_2 &= 0 \\
c_3 &= \frac{1}{6}c_1 \\
c_{n+2} &= \frac{n^2}{(n+2)(n+1)}c_n, \quad n>1
\end{aligned}$$

Es ist gleich zu erkennen, dass auer c_0 alle Koeffizienten vor geraden Potenzen 0 sind. Betrachten wir nun die Anfangsbedingungen $y(0)=c_0=1$ und $y(1)=c_1=0$, so sehen wir, dass $c_2=0$, $c_3=0$, $c_4=0$, ..., also alle weiteren Koeffizienten Null sind, also ist die Lösung dieses Anfangswertproblems die Konstante

$$\underline{y=1}\,.$$

Aufgabe 45: Bei einem verallgemeinerten Potenzreihenansatz erlaubt man eine Verschiebung der Exponenten um eine Zahl $\lambda\in\mathbb{R}$, um Lsungen finden zu knnen, die sich nicht als gewhnliche Potenzreihe darstellen lassen. Man macht also den Ansatz

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\lambda}; \quad y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\lambda)x^{k+\lambda-1}; \quad y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda-2}.$$

Wir haben nun einen zustzlichen Parameter λ, den wir bestimmen mssen. Die Terme fr y' und y'' ergeben sich wie gehabt, indem man y gliedweise ableitet. Wir knnen davon ausgehen, dass $a_0\neq 0$ ist (dies lsst sich durch eine Indexverschiebung stets erreichen!). Also ist

$$x^2y'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}(k+\lambda-1)x^{k+\lambda} \quad \text{und} \quad x^2y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda}.$$

Dies setzen wir nun in die Differentialgleichung ein und erhalten die Bedingung

$$0=\sum_{k=1}^{\infty}x^{k+\lambda}\left[a_k(k+\lambda)(k+\lambda-1)+a_{k-1}(k+\lambda-1)-2a_k\right]+a_0x^{\lambda}(\lambda(\lambda-1)-2)$$

Auch hier machen wir wieder einen Koeffizientenvergleich. Das erste Ziel ist die Bestimmung von λ. Da wir $a_0 \neq 0$ angenommen hatten, muss

$$0 \stackrel{!}{=} \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

gelten. Die eine Lsung $\lambda = 2$ ist fr uns ohne Bedeutung, denn sie führt ja auf eine normale Potenzreihe. Interessanter ist die Lsung $\lambda = -1$. Setzen wir sie in obige Formel ein, so erhalten wir die Rekursionsformel

$$0 \stackrel{!}{=} a_k(k-1)(k-2) + a_{k-1}(k-2) - 2a_k \Rightarrow a_k k(k-3) + a_{k-1}(k-2) \stackrel{!}{=} 0,\ \ k \geq 1;$$

Aufgelst nach a_k sieht sie so aus

$$\underline{a_k = -\frac{k-2}{k(k-3)} a_{k-1}.}$$

Diese Formel gilt aber erst fr $\underline{k > 3}$, weil fr $k = 3$ eine Nullstelle im Nenner auftreten wrde. Fr $k \in \{1, 2, 3\}$ bestimmen wir die Koeffizienten durch Vergleich:

$$k = 1:\ \ -2a_1 - a_0 = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = -\frac{1}{2}a_0},\ \ k = 2:\ \ -2a_2 = 0,\ \ \underline{a_2 = 0},\ \ k = 3:\ \ \underline{a_2 = 0}.$$

Wir erhalten keine Bedingungen an a_0 und a_3, diese beiden Koeffizienten sind also beliebig.

Zusatz: Durch vollständige Induktion (war nicht verlangt!) erhlt man fr $k > 3$ die geschlossene Darstellung

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}(k-2)}{k!} 6a_3, k \geq 3.$$

mit a_3 beliebig. Setzen wir $A := a_0$ und $B := a_3$, so ergibt sich insgesamt

$$y(x) = A(1 - \frac{2}{x}) + B \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k-2)}{k!} x^{k-1},\ \ A, B \in \mathbb{R}.$$

¡hr¿¡b¿Timeout. This is only