Worsheet No. 10
Exercises with Solutions

Problem 46: Determine the Laplace-transform of:

(a) $f(x) = x^2 + 3x + 4 + x^2\sin(2x)$ (b) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & 0 \le x < \pi \\ \cos(x) & x \ge \pi \end{cases}$

(c) $f(x) = (e^{2x} + e^{3x}) \cdot \sin(4x)$ (d) $f(x) = \cos(x) - x\sin(x) = (x \cdot \cos(x))'$

(e) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Use in part (e) the definition of the Laplace-transform and apply mathematical induction.

Lösung 46:

(a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(s) &= \mathcal{L}(x^2) + 3\mathcal{L}(x) + 4\mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(x^2\sin(2x)) \\
&= \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s} + \frac{d^2}{ds^2}\underbrace{\mathcal{L}(\sin(2x))}_{=\frac{2}{s^2+4}} \\
&= \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s} - \frac{d}{ds}\left(\frac{4s}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s} + \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}, \quad s > 0.
\end{aligned}$$

(b)

$$f(x) = \sin(x) + \begin{cases} 0 & 0 \le x < \pi \\ \cos(x) - \sin(x) & x \ge \pi \end{cases} = \sin(x) + \begin{cases} 0 & 0 \le x < \pi \\ -\cos(x-\pi) + \sin(x-\pi) & x \ge \pi \end{cases}$$

Der erste Summand kann direkt transformiert werden, beim zweiten kann man den Verschiebungssatz anwenden:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\left(-\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1 + e^{-\pi s} - se^{-\pi s}}{s^2+1}, \quad s > 0.$$

(c)

$$f(x) = e^{2x}\sin(4x) + e^{3x}\sin(4x)$$

Hier kann bei beiden Summanden der Dämpfungssatz angewendet werden:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{4}{(s-2)^2+16} + \frac{4}{(s-3)^2+16}, \quad s > 3.$$

(d) Es gibt zwei Methoden dies zu lösen, einmal die Summanden einzeln:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{2s}{(s^2+1)^2} = \frac{s^3-s}{(s^2+1)^2}, \quad s > 0.$$

Oder man nutzt die Ableitung: $f(x) = g'(x)$ mit $g(x) = x\cos(x)$ und $\mathcal{L}g(s) = \frac{s}{s^2+1}$

$$\mathcal{L}f(s) = s \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - g(0) = s \cdot \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} - 0 = \frac{s^3-s}{(s^2+1)^2}, \quad s > 0.$$

(e) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $(\mathcal{L}t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ ist. Wir führen den Beweis der Aussage mit vollständiger Induktion durch:

$n = 1:$ Zu zeigen ist $(\mathcal{L}t)(s) = \frac{1}{s^2}$:

$$(\mathcal{L}t)(s) = \int_0^\infty te^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = 0 + \frac{1}{s^2}$$

$n \to n+1:$ Gegeben ist, dass $(\mathcal{L}t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ ist, zu zeigen ist, dass dann auch $(\mathcal{L}t^{n+1})(s) = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}$ ist.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}t^{n+1})(s) = \int_0^\infty t^{n+1}e^{-st}\,dt &= \left[-\frac{1}{s}t^{n+1}e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{(n+1)}{s}\int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt \\
&= 0 + \frac{n+1}{s}(\mathcal{L}t^n)(s) = \frac{n+1}{s}\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}
\end{aligned}$$

Problem 47: Specify which functions $f(t)$, $t \in [0,\infty)$ have been Laplace-transformed in the given examples:

$$\text{(a)}\quad F(s) = \frac{2s}{s^4+2s^3+2s^2+2s+1}\,, \qquad \text{(b)}\quad F(s) = \operatorname{arccot}(s-1)\,, \qquad \text{(c)}\quad F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{\sqrt{s^2+1}}.$$

Hint: Apply in (a) the partial fraction decomposition. In parts (b) and (c) adopt appropriate computational rules of the Laplace-transform.

Lösung 47:

(a) $F(s) = \frac{2s}{s^4+2s^3+2s^2+2s+1} = \frac{2s}{(s^2+1)(s+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \sin t - te^{-t}$.

(b) Es sei $G(s) := -\frac{d}{ds}\operatorname{arccot} s = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(G(s))(t) = \sin t \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\operatorname{arccot} s)(t) = \frac{\sin t}{t}$
$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\operatorname{arccot}(s-1))(t) = \frac{\sin t e^t}{t}$.

(c) Es sei $G(s) := \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(G(s))(t) = I_0(t)$
$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-\pi s}}{\sqrt{s^2+1}})(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le t \le \pi \\ I_0(t-\pi) & \text{für} \quad \pi \le t \le \infty \end{cases}$.

Problem 48: Solve the initial value problem

$$y'''(x) + 4y''(x) + 5y'(x) + 2y(x) = x, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 1,\, y''(0) = -1$$

by means of a Laplace-transform.

Lösung 48: Laplace-Transformation der Anfangswertaufgabe ergibt für $Y(s) = (\mathcal{L}y)(s)$:

$$(s^3+4s^2+5s+2)Y(s) - s - 3 = \frac{1}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{s^3+3s^2+1}{s^2(s^3+4s^2+5s+2)} = \frac{s^3+3s^2+1}{s^2(s+1)^2(s+2)}$$

Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} & \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s+1} + \frac{d}{(s+1)^2} + \frac{e}{(s+2)} \\ = \; & \frac{(a+c+e)s^4 + (4a+b+3c+d+2e)s^3 + (5a+4b+2c+2d+e)s^2 + (2a+5b)s + 2b}{s^2(s+1)^2(s+2)} \end{aligned}$$

zeigt, dass $b = \frac{1}{2}$ und $a = -\frac{5}{4}$ und der Rest führt auf das lineare Gleichungssystem in c, d und e:

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & & 1 & \frac{5}{4} \\ 3 & 1 & 2 & \frac{11}{2} \\ 2 & 2 & 1 & \frac{29}{4} \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{7}{4} \\ 0 & 2 & -1 & \frac{19}{4} \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{5}{4} \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{4} \end{array}$$

Somit gilt $c = 0,\ d = 3,\ e = \frac{5}{4}$:

$$Y(s) = -\frac{5}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{\frac{5}{4}}{s+2}$$

Nun ist die Rücktransformation problemlos möglich:

$$y(x) = -\frac{5}{4} + \frac{x}{2} + 3xe^{-x} + \frac{5}{4}e^{-2x}\,.$$

Problem 49: Determine the solution of the initial value problem

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} y(x), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x \ge 0,$$

by means of a Laplace-transform.

Lösung 49: Nach Laplace-Transformation mit $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$ ergibt sich das System

$$\begin{array}{rcl} sY_1(s) \;\; -3 & = & 4Y_1(s) \;\; +4Y_2(s) \\ sY_2(s) \;\; +1 & = & -2Y_1(s) \end{array}$$

und im Schema

$$\begin{array}{cc|c} 4-s & 4 & -3 \\ \boxed{-2} & -s & 1 \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{cc|c} 0 & \boxed{s^2-4s+8} & -s-2 \\ \mathbf{-2} & -s & 1 \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{cc|c} 0 & \mathbf{s^2-4s+8} & -s-2 \\ \mathbf{-2s^2+8s-16} & 0 & -6s+8 \end{array}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
Y_1(s) &= \frac{-6s+8}{-2s^2+8s-16} = \frac{3s-4}{(s-2)^2+2^2} = 3\frac{s-2}{(s-2)^2+2^2} + \frac{2}{(s-2)^2+2^2}, \quad s>2 \\
Y_2(s) &= \frac{-s-2}{s^2-4s+8} = -\frac{s-2}{(s-2)^2+2^2} - 2\frac{2}{(s-2)^2+2^2}, \quad s>2
\end{aligned}$$

und damit lautet unser Ergebnis:

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^{2x}\,(3\cos 2x + \sin 2x) \\ e^{2x}\,(-\cos 2x - 2\sin 2x) \end{pmatrix}, \quad x \geq 0.$$

Problem 50: Consider the vector space $C[0,1]$ with its scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ as defined in exercise No.10 on 2^{nd} worksheet. The functions $v_j(x) = \sin(\pi j x)$, $j = 1, \ldots, n$ span a subspace U of $C[0,1]$. We have $v_j \perp v_k$ for $j \neq k$. Let $u = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \in U$ (where $a_j \in \mathbb{R}$) be a function which satisfies $\langle u'' - u, v \rangle = \langle f, v \rangle$ with $f(x) = x$ for all $v \in U$.

(a) Show that $\langle u'' - u, v_k \rangle = -\frac{1}{2} a_k(\pi^2 k^2 + 1)$ for $k = 1, \ldots, n$.

(b) Verify that $\langle f, v_k \rangle = \dfrac{(-1)^{k+1}}{\pi k}$ for $k = 1, \ldots, n$.

(c) Determine the coefficients a_k and find the approximative solution u for $n = 3$.

Note: For the case $U = C[0,1]$ we obtain an exact solution of the differential equation $u''(x) - u(x) = f(x)$. The restriction on a subset $U \subsetneqq C[0,1]$ yields an approximative solution for the initial value problem $u(0) = u(1) = 0$. In mathematics this approach is called *Galerkin method*. It is applied particularly for the *finite element method.*

Lösung 50: Das Skalarprodukt von $u, v \in C[0,1]$ ist definiert als

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx.$$

Die komplexe Konjugation können wir weglassen, da wir uns nur für reellwertige Funktionen interessieren.

(a) $\langle u'' - u, v_k \rangle = \displaystyle\int_0^1 \big(u''(x) - u(x)\big)v_k(x)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j''(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j v_j(x)\right) v_k(x)\,dx$

Mit $v_j''(x) = -\pi^2 j^2 \sin(\pi j x) = -\pi^2 j^2 v_j$ folgt

$$\begin{aligned}
\langle u'' - u, v_k \rangle &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} a_j(-\pi^2 j^2 - 1)v_j(x)\right) v_k(x)\,dx \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j(-\pi^2 j^2 - 1) \underbrace{\int_0^1 v_j(x)v_k(x)\,dx}_{=\langle v_j, v_k\rangle = 0 \text{ für } j\neq k} = -a_k(\pi^2 j^2 + 1)\int_0^1 v_k(x)v_k(x)\,dx
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $y = \pi k x$ berechnet man

$$\int_0^1 v_k(x)v_k(x)\,dx = \int_0^1 \sin^2(\pi k x)\,dx = \int_0^{\pi k} \frac{\sin^2(y)}{\pi k}\,dy = \int_0^{\pi k} \frac{\sin^2(y)}{\pi k}\,dy$$

und nach Aufg. 57 c), Blatt 12 in HM I ergibt das

$$= \left[\tfrac{1}{2\pi k}x - \tfrac{1}{2\pi k}\underbrace{\sin(y)}_{=0}\cos(y) - \right]_0^{\pi k} = \tfrac{1}{2}$$

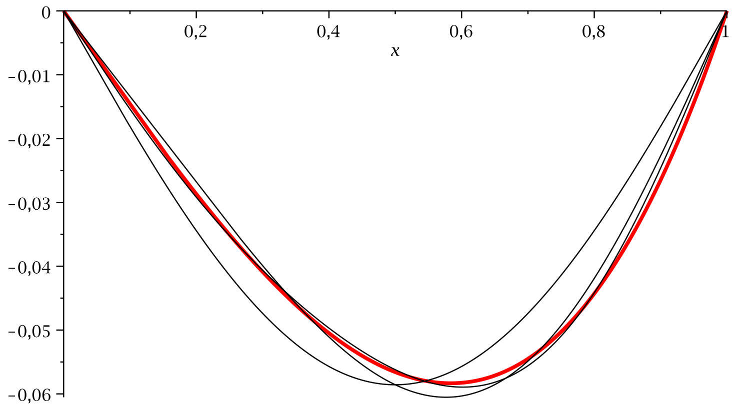
(b) $\langle f, v_k \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)v_k(x)\,dx = \int_0^1 x\sin(\pi k x)\,dx = \left[x(-\tfrac{1}{\pi k})\cos(\pi k x)\right]_0^1 - \int_0^1 (-\tfrac{1}{\pi k})\cos(\pi k x)\,dx$

$= (-\frac{1}{\pi k})\cos(\pi k) + \left[\frac{1}{\pi^2 k^2}\underbrace{\sin(\pi k x)}_{=0}\right]_0^1 = (-\frac{1}{\pi k})(-1)^k$

(c) Es gilt insbesondere $\langle u'' - u, v_j \rangle = \langle f, v_j \rangle$, also folgt mit (a) und (b)

$$-\tfrac{1}{2}a_k(\pi^2 k^2 + 1) = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi k} \quad \Leftrightarrow \quad a_k = \frac{2(-1)^k}{\pi k(\pi^2 k^2 + 1)}$$

Es gilt also $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = -\dfrac{2\sin(\pi x)}{\pi(\pi^2+1)} + \dfrac{2\sin(2\pi x)}{2\pi(4\pi^2+1)} - \dfrac{2\sin(3\pi x)}{3\pi(9\pi^2+1)}.$



Die exakte Lösung u (rot) und die ersten drei Näherungslösungen
$a_1 v_1$, $a_1 v_1 + a_2 v_2$, $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$ im Vergleich