Worsheet No. 11
Exercises with Solutions

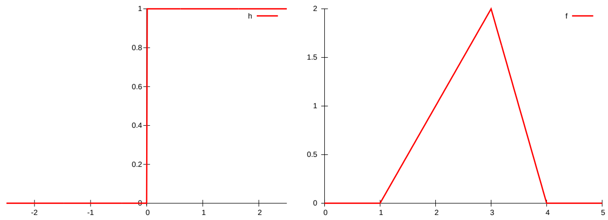
Problem 51: Consider the functions

$$h(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases} \qquad \text{and} \qquad f(t) = \begin{cases} t-1, & 1 \leq t < 3, \\ 8-2t, & 3 \leq t < 4, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

(a) Rewrite the function f into a form without any case differentiation using the Heaviside step function $h(t-a)$.

(b) Sketch the graph of the function f and determine its Laplace-transform.

Lösung 51: Wir zerlegen die Funktion in einzelne Stücke und bestimmen so die Summanden:



$$\begin{array}{lllll} \text{Ab} & t=1 & \text{beginnt} & t-1 & \text{also} \quad (t-1)h(t-1)\,, \\ \text{ab} & t=3 & \text{endet} & t-1 & \text{also} \quad -(t-1)h(t-3)\,, \\ \text{ab} & t=3 & \text{beginnt} & 8-2t & \text{also} \quad (8-2t)h(t-3)\,, \\ \text{ab} & t=4 & \text{endet} & 8-2t & \text{also} \quad -(8-2t)h(t-4)\,. \end{array}$$

Wir erhalten insgesamt:

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-1)h(t-1) - (t-1)h(t-3) + (8-2t)h(t-3) - (8-2t)h(t-4) \\ &= (t-1)h(t-1) - 3(t-3)h(t-3) + 2(t-4)h(t-4) \end{aligned}$$

Damit lautet die Laplacetransformierte $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{3}{s^2}e^{-3s} + \frac{2}{s^2}e^{-4s}$.

Problem 52: Check if the given parameter integral

$$J(t) = \int_0^1 \arcsin(tx)dx \quad , \quad 0 \leq t < 1 \quad ,$$

is differentiable. Evaluate it by first determining its derivative $J'(t)$ on the open interval $0 < t < 1$. From this result, derive $J(t)$, $0 \leq t < 1$, and determine the value of the integration constant from the value of $J(t)$ at $t = 0$. Can $J(t)$ be smoothly continued at $t = 1$?

Lösung 52: Die Vertauschung von Differentiation und Integration ergibt für $0 < t < 1$:

$$J'(t) = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-t^2x^2}}\,dx = \left[-\frac{1}{t^2}\sqrt{1-t^2x^2}\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2} + \frac{1}{t^2}.$$

Dies können wir nun integrieren um $J(t)$ zu erhalten: Mit partieller Integration im zweiten Schritt findet man

$$\int \frac{1}{t^2}dt - \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}dt = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\sqrt{1-t^2} + \int \frac{2t}{2t\sqrt{1-t^2}}dt = -\frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} + \arcsin t + C$$

Damit erhält man

$$J(t) = -\frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} + \arcsin t + C, \quad 0 < t < 1,$$

und dies ist im nachhinein auch gültig für $t = 0$ (Stetigkeit des Parameterintegrals bei stetigem Integranden). Aus $J(0) = 0$ folgt $C = 0$. Im Intervall $0 \leq t < 1$ gilt

$$J(t) = \frac{(\sqrt{1-t^2}-1)(\sqrt{1-t^2}+1)}{t(\sqrt{1-t^2}+1)} + \arcsin t = -\frac{t}{1+\sqrt{1-t^2}} + \arcsin t.$$

Die stetige Fortsetzung nach $t = 1$ liefert: $\lim_{t \to 1} J(t) = -1 + \frac{\pi}{2}$.

Problem 53: Evaluate the convolution $f * g$ for the functions given by

(a) $f(t) = \sin(t), \qquad g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ 2, & t \geq 3, \end{cases}$

(b) $f(t) = \cosh(t), \qquad g(t) = \sin^2(t).$

Also determine $\mathcal{L}(f * g)$ and compare the result with $\mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g$.
Lösung 53:

(a) Zunächst ist $g(t) = 2h(t-3)$, wobei h die Heaviside-Funktion $h(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0 \\ 1\,, & t \geq 0 \end{cases}$ darstellt. Damit rechnen aus:

$$(f * g)(t) = 2\int_0^t \sin(t-v)h(v-3)\ dv = 2h(t-3)\int_3^t \sin(t-v)\ dv$$
$$= 2h(t-3)\left[\cos(t-v)\right]_{v=3}^{v=t} = 2h(t-3)\left[1-\cos(t-3)\right].$$

Damit können wir dann auch die Laplace-Transformation der Faltung bestimmen:

$$\mathcal{L}\left[2h(t-3)(1-\cos(t-3))\right](s) = 2e^{-3s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{2e^{-3s}}{s(s^2+1)}\,,\ s > 0$$

Wenn wir die Multiplikation der Laplacetransformationen ausrechnen, kommen wir auf

$$\mathcal{L}[\sin t](s) \cdot \mathcal{L}[2h(t-3)](s) = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{2e^{-3s}}{s}\,,\ s > 0\,.$$

Also sind $\mathcal{L}(f * g)$ und $\mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g$ gleich, was nach Satz 3.19 ja auch so sein muss (das wird auch in den weiteren Aufgabenteilen der Fall sein).

(b)

$$(f * g)(t) = \int_0^t \cosh(t-v)\sin^2(v)\ dv = \int_0^t \cosh(t-v)\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2v)}{2}\right)\ dv$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t \cosh(t-v)\ dv - \frac{1}{2}\int_0^t \cosh(t-v)\cos(2v)\ dv = \frac{1}{2}\left[-\sinh(t-v)\right]_0^t - \frac{1}{4}\int_0^t \left(e^{t-v} + e^{v-t}\right)\cos(2v)\ dv$$
$$= \frac{1}{2}\sinh(t) - \frac{1}{4}e^t\int_0^t e^{-v}\cos(2v)\ dv - \frac{1}{4}e^{-t}\int_0^t e^{v}\cos(2v)\ dv$$

Das Integral $\int_0^t e^{-v}\cos(2v)\ dv$ berechnen wir zum Beispiel mit zweimaliger partieller Integration:

$$\int_0^t e^{-v}\cos(2v)\ dv = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}e^{-t}\sin(2t) - \frac{1}{5}e^{-t}\cos(2t).$$

Das kann man zum Beispiel auch daher sehen, dass

$$\int e^{\pm x}\cos(2x)\ dx = \frac{e^{\pm x}}{5}\left(\pm\cos(2x) + 2\sin(2x)\right),$$

wobei mal letztere Formel in einer Klausur natürlich nicht hat, weshalb man dann zweimal partiell integrieren müßte. Analog berechnet man das Integral

$$\int_0^t e^{v}\cos(2v)\ dv = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}e^{t}\sin(2t) + \frac{1}{5}e^{t}\cos(2t).$$

Wir erhalten also

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2}\sinh(t) - \frac{1}{4}e^t\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}e^{-t}\sin(2t) - \frac{1}{5}e^{-t}\cos(2t)\right) - \frac{1}{4}e^{-t}\left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}e^{t}\sin(2t) + \frac{1}{5}e^{t}\cos(2t)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sinh(t) - \frac{1}{10}\sinh(t) - \frac{1}{5}\sin(2t) = \frac{2}{5}\sinh(t) - \frac{1}{5}\sin(2t).$$

Die Laplacetransformation von $(f * g)$ ist also

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \frac{2}{5}\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{5}\frac{2}{s^2+4} = \frac{2}{(s^2-1)(s^2+4)}\,,\ s > 1.$$

Das Produkt der Laplacetransformationen $\mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$ ergibt

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}(f))(s) \cdot (\mathcal{L}(g))(s) &= \frac{s}{s^2-1} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right)(s) \\
&= \frac{s}{s^2-1} \cdot \left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4}\frac{s}{s^2-1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{s^2+4}{(s^2-1)(s^2+4)} - \frac{1}{2}\frac{s^2}{(s^2+4)s^2-1} = \frac{2}{(s^2-1)(s^2+4)}\,, \quad s > 1\,.
\end{aligned}$$

Das Produkt der Laplacetransformationen stimmt also wieder mit Laplacetransformation der Faltung überein.

Problem 54: Given is an initial value problem

$$\begin{aligned}
-3x'(t) + x(t) + 2y'(t) + 2y(t) &= 6e^t + 5e^{-2t}, \\
x'(t) - x(t) + y'(t) - y(t) - z'(t) + z(t) &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t}, \\
2x'(t) - y(t) - z'(t) &= 0,
\end{aligned}$$

with conditions

$$x(0) = 2, \quad y(0) = 3, \quad z(0) = 4\,.$$

Determine the first component of the solution, namely the function $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Hint: Apply the Laplace-transform.

Lösung 54: Mit den Abkürzungen $X(s) = \mathcal{L}x(s)$, $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$, $Z(s) = \mathcal{L}z(s)$, erhalten wir durch Transformation der drei Gleichungen nach der Formel für die Differenziation im Urbildraum

$$\begin{aligned}
(-3s+1)\,X(s) + 3\,x(0) + 2\,(s+1)\,Y(s) - 2y(0) &= \frac{6}{s-1} + \frac{5}{s+2}, \\
(s-1)\,X(s) - x(0) + (s-1)\,Y(s) - y(0)& \\
-\,(s-1)\,Z(s) + z(0) &= \frac{3}{2s} + \frac{3}{2(s+2)}, \\
2s\,X(s) - 2x(0) - Y(s) - s\,Z(s) + z(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Setzen wir die Werte aus den Anfangsbedingungen ein, so erhalten wir das LGS

$$\begin{pmatrix} -3s+1 & 2\,(s+1) & 0 \\ s-1 & s-1 & -(s-1) \\ 2s & -1 & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \\ Z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{s-1} + \frac{5}{s+2} \\ 1 + \frac{3}{2s} + \frac{3}{2(s+2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die zweite Gleichung teilt man mit $s-1$ und subtrahiert sie anschließend s-mal von der dritten. So ergibt sich

$$\begin{pmatrix} -3s+1 & 2\,(s+1) & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ s & -(s+1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \\ Z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{s-1} + \frac{5}{s+2} \\ \frac{1}{s-1} + \frac{3}{2s(s-1)} + \frac{3}{2(s+2)(s-1)} \\ \frac{-s}{s-1} - \frac{3}{2(s-1)} - \frac{3s}{2(s+2)(s-1)} \end{pmatrix}$$

Die Terme auf der rechten Seite können wir gleich durch Partialbruchzerlegung vereinfachen. Es ist

$$\frac{1}{s-1} + \frac{3}{2s(s-1)} + \frac{3}{2(s+2)(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{3}{2s} + \frac{3}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{2(s+2)} = \frac{3}{s-1} - \frac{1}{2(s+2)} - \frac{3}{2s}$$

und

$$\frac{-s}{s-1} - \frac{3}{2(s-1)} - \frac{3s}{2(s+2)(s-1)} = -1 - \frac{1}{s-1} - \frac{3}{2(s-1)} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{2(s-1)} = -1 - \frac{3}{s-1} - \frac{1}{s+2}.$$

Das Gleichungsystem lautet nun also

$$\begin{pmatrix} -3s+1 & 2\,(s+1) & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ s & -(s+1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \\ Z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{s-1} + \frac{5}{s+2} \\ \frac{3}{s-1} - \frac{1}{2(s+2)} - \frac{3}{2s} \\ -1 - \frac{3}{s-1} - \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

Nun addieren wir die dritte Gleichung 2-mal zur ersten und erhalten so

$$(-s+1)\,X(s) = -2 + \frac{3}{s+2}$$

bzw.

$$X(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{3}{(s+2)(s-1)} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2}\,,\ s>1\,.$$

Die folgenden Ergebnisse für Y und Z wurden nicht verlangt, sie sind hier zur Vollständigkeit angegeben: Die dritte Zeile des umgeformten LGS ergibt

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s}{s+1}\,X(s) + \frac{1}{s+1} + \frac{3}{(s-1)(s+1)} + \frac{1}{(s+2)(s+1)}\\
&= \frac{s^2+2s+s^2-s+s^2+s-2+3s+6+s-1}{(s+1)(s+2)(s-1)}\\
&= \frac{3s^2+6s+3}{(s+1)(s+2)(s-1)} = 3\,\frac{s+1}{(s+2)(s-1)}\\
&= \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s-1}.
\end{aligned}$$

Schließlich folgt aus der zweiten Zeile des LGS

$$\begin{aligned}
Z(s) &= X(s) + Y(s) - \frac{3}{s-1} + \frac{1}{2(s+2)} + \frac{3}{2s}\\
&= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s-1} - \frac{3}{s-1} + \frac{1}{2(s+2)} + \frac{3}{2s}\\
&= \frac{5}{2(s+2)} + \frac{3}{2s}.
\end{aligned}$$

In einer Tabelle schlagen wir die entsprechenden inverse Laplace-Transformierten für $t \geq 0$ nach:

$$x(t) = e^t + e^{-2t}\,, \quad y(t) = 2e^t + e^{-2t}\,, \quad z(t) = \frac{5}{2}\,e^{-2t} + \frac{3}{2}\,.$$

Problem 55: A car with a wheelbase of 3 m and equal hubloads of $F = 7200$ N is parked on a 30 m long bridge, 6 m in from the right bearing. The bridge has the special load per unit of length of $q_0 = 14400$ N/m and the bending stiffness of $EJ = 6 \cdot 10^9$ [Nm^2]. Given these characteristics, the displacement w of the bridge satisfies the ordinary differential equation

$$EJ \cdot w''''(x) = q_0 + F\delta(x-21) + F\delta(x-24), \qquad w(0) = w''(0) = w(30) = w''(30) = 0.$$

Determine the function $w(x)$ by means of a Laplace transformation. Hint: You may set $w'(0) = A$ and $w'''(0) = B$, and obtain the constants A and B at the end from the conditions $w(30) = w''(30) = 0$.
Lösung 55: Wir setzen $W(s) = \mathcal{L}(w(x))(s)$. Dann gilt

$$EJ \cdot (s^4 W(s) - s^3 w(0) - s^2 w'(0) - s w''(0) - w'''(0)) = \frac{q_0}{s} + Fe^{-21s} + Fe^{-24s}.$$

Wegen $w(0) = w''(0) = 0$ fallen die Terme $-s^3 w(0)$ und $-sw''(0)$ raus. Der Einfachheit halber setzen wir $w'(0) = A$ und $w'''(0) = B$ und bestimmen die Konstanten A und B später. Dann gilt

$$s^4 W(s) = \frac{q_0}{EJ \cdot s} + \frac{F}{EJ}e^{-21s} + \frac{F}{EJ}e^{-24s} + s^2 A + B$$

oder

$$W(s) = \frac{q_0}{EJ \cdot s^5} + \frac{F}{EJ}\,\frac{e^{-21s}}{s^4} + \frac{F}{EJ}\,\frac{e^{-24s}}{s^4} + \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s^4}\,,\ s>0\,.$$

Wegen den Faktoren e^{-21s} und e^{-24s} müssen wir den Verschiebungssatz bei der Rücktransformation anwenden. Beispielsweise ist die Rücktransformation von

$$\frac{e^{-21s}}{s^4} \quad \text{gleich} \quad \begin{cases} 0, & 0 < x < 21 \\ \frac{(x-21)^3}{3!}, & 21 \leq x \end{cases}.$$

Insgesamt liefert die Rücktransformation

$$w(x) = \begin{cases} \frac{q_0}{EJ}\frac{x^4}{4!} + Ax + \frac{B}{3!}x^3, & 0 < x < 21, \\ \frac{q_0}{EJ}\frac{x^4}{4!} + Ax + \frac{B}{3!}x^3 + \frac{F}{EJ}\frac{(x-21)^3}{3!}, & 21 \leq x < 24, \\ \frac{q_0}{EJ}\frac{x^4}{4!} + Ax + \frac{B}{3!}x^3 + \frac{F}{EJ}\frac{(x-21)^3}{3!} + \frac{F}{EJ}\frac{(x-24)^3}{3!}, & 21 \leq x < 30. \end{cases}$$

Jetzt müssen wir noch die Konstanten A und B anpassen, damit die Randbedingungen $w(30) = w''(30) = 0$ erfüllt sind. Offensichtlich gilt

$$w(30) = \frac{q_0}{EJ}\frac{30^4}{4!} + 30A + \frac{B}{3!}30^3 + \frac{F}{EJ}\frac{9^3}{3!} + \frac{F}{EJ}\frac{6^3}{3!} = 33750\frac{q_0}{EJ} + 30A + 4500B + 157,5\frac{F}{EJ}.$$

Außerdem ist im Intervall $(21, 30)$ die zweite Ableitung

$$w''(x) = \frac{q_0}{EJ}\frac{x^2}{2!} + Bx + \frac{F}{EJ}(x-21) + \frac{F}{EJ}(x-24),$$

also

$$w''(30) = 450\frac{q_0}{EJ} + 30B + 15\frac{F}{EJ}.$$

Weil $w''(30) = 0$ gelten soll, finden wir

$$450\frac{q_0}{EJ} + 30B + 15\frac{F}{EJ} = 0 \text{ oder } B = -\frac{F}{2 \cdot EJ} - 15\frac{q_0}{EJ} = -3.66 \cdot 10^{-5}.$$

Wenn wir das in die obige Gleichung für $w(30)$ einsetzen, so ergibt sich

$$w(30) = 33750\frac{q_0}{EJ} + 30A - 2250\frac{F}{EJ} - 67500\frac{q_0}{EJ} + 157,5\frac{F}{EJ}.$$

Da ja $w(30) = 0$ gelten soll, muß also

$$A = -1125\frac{q_0}{EJ} + 75\frac{F}{EJ} + 2250\frac{q_0}{EJ} - 5,25\frac{F}{EJ} = \frac{9(500q_0 + 31F)}{4EJ} = 0,0028.$$

Auf das Einsetzen dieser Konstanten in die Darstellung der Lösung w verzichten wir einfach mal :-)