Worsheet No. 12
Exercises with Solutions

Problem 56: Consider the function $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ with

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cos(x_2) \cos(x_3), \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Determine the gradient $\nabla f(x)$ and the Hessian matrix $H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,2,3}$ (i.e. the matrix whose elements are the second partial derivatives of f).

Lösung 56: $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x),\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)\right)^\top = (\cos x_2 \cos x_3,\ -x_1 \sin x_2 \cos x_3,\ -x_1 \cos x_2 \sin x_3)^\top$.

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}\right)_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin x_2 \cos x_3 & -\cos x_2 \sin x_3 \\ -\sin x_2 \cos x_3 & -x_1 \cos x_2 \cos x_3 & x_1 \sin x_2 \sin x_3 \\ -\cos x_2 \sin x_3 & x_1 \sin x_2 \sin x_3 & -x_1 \cos x_2 \cos x_3 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: H_f ist eine symmetrische Matrix, da nach dem Satz von Schwarz $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ gilt.

Problem 57: Consider the scalar function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) := x_1^2 x_2$, and a vector $d := (\cos\varphi, \sin\varphi)^\top$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

(a) Determine the gradient ∇f and the scalar product $d \cdot \nabla f$ at x.

(b) Calculate the directional derivative $\frac{\partial f}{\partial d}(x)$ using Definition 4.14.

Lösung 57:

(a) Da f in ihren ganzen Definitionsbereich partiell differentierbar ist und ihr Gradient stetig ist, lässt sich die Richtungsableitung von f nach dem Satz 4.15 folgendermaßen leicht ausrechnen:

$$\nabla f(x) = (2x_1 x_2, x_1^2)^\top, \qquad d \cdot \nabla f(x) = 2\, x_1 x_2\, \cos\varphi + x_1^2\, \sin\varphi.$$

(b) Nach Definition 4.14 ist der folgende Grenzwert zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial d} &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left((x_1 + h\, \cos\varphi)^2 (x_2 + h\, \sin\varphi) - x_1^2 x_2\right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big((x_1 + h\, \cos\varphi)^2 \left[x_2 + h\, \sin\varphi - x_2\right] + (x_1 + h\, \cos\varphi)^2 x_2 - x_1^2 x_2 \Big) \\ &= \lim_{h \to 0} (x_1 + h\, \cos\varphi)^2 \sin\varphi + \lim_{h \to 0} x_2 (2\, x_1\, \cos\varphi + h \cos^2\varphi) \\ &= 2\, x_1 x_2\, \cos\varphi + x_1^2\, \sin\varphi. \end{aligned}$$

Der Limes existiert für alle $x \in \mathbb{R}^2$ und für alle d, d.h. f ist in ganz $\mathbb{R}^2$ in alle Richtungen differenzierbar! Die Ergebnisse aus (a) und (b) stimmen überein.

Problem 58:

(a) Determine $(f^T g)'$ and $(f \circ g)'$ for

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 \\ 2x_2^3 \end{pmatrix}, \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2\, \sin(x_1) \\ \cos(x_1) + x_2 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Calculate $(f \circ g)'$ directly and then as well by means of the chain rule for

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1\, \cosh(x_2) \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 58:

(a) Die Ableitungen ergeben sich zu

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x_2 \\ 0 & 6x_2^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g'(x) = \begin{pmatrix} x_2 \cos x_1 & \sin x_1 \\ -\sin x_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach der Produktregel ist dann

$$\begin{aligned}(f^T g)'(x) &= f(x)^T g'(x) + g(x)^T f'(x)\\ &= (x_1 x_2 \cos x_1 + x_2^3 \cos x_1 - 2x_2^3 \sin x_1 + x_2 \sin x_1,\\ &\qquad 8x_2^3 + 3x_2^2 \sin x_1 + x_1 \sin x_1 + 6x_2^2 \cos x_1).\end{aligned}$$

Für die Verkettung nehmen wir natürlich die Kettenregel und erhalten

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2\cos x_1 + 2x_2 \\ 0 & 6(\cos(x_1)+x_2)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \cos x_1 & \sin x_1 \\ -\sin x_1 & 1 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} x_2 \cos x_1 - 2\sin x_1(\cos(x_1)+x_2) & \sin x_1 + 2(\cos(x_1)+x_2) \\ -6\sin x_1(\cos(x_1)+x_2)^2 & 6(\cos(x_1)+x_2)^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) Zur direkten Berechung stellen wir $(f\circ g)$ auf und leiten es ab:

$$f(g(x)) = \begin{pmatrix} x_1 \cosh(x_2) + 1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \Rightarrow (f\circ g)'(x) = \begin{pmatrix} \cosh x_2 & x_1 \sinh x_2 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Kettenregel benötigen wir die Ableitung der einzelnen Funktionen:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix},\ g'(x) = \begin{pmatrix} \cosh x_2 & x_1 \sinh x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir die Kettenregel benutzen und erhalten dasselbe Ergebnis wie oben:

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh x_2 & x_1 \sinh x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh x_2 & x_1 \sinh x_2 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problem 59: Find the derivative of the function $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ given by

$$f(s) := \int_{1/s}^{s^2} \frac{\sin(st)}{t}\, dt\,,$$

applying partial derivatives of $g(x,y,z) = \int_x^y \frac{\sin(zt)}{t}\, dt$ and the chain rule.

Lösung 59: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt für die partiellen Ableitungen nach x bzw. y:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{\sin(xz)}{x}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\sin(yz)}{y}.$$

Für die partielle Ableitung nach z kann man Differentiation und Integration vertauschen (s. HM II: Parameterintegrale) und erhält

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \int_x^y \cos(zt)\, dt = \left[\frac{\sin(zt)}{z}\right]_x^y = \frac{\sin(yz) - \sin(xz)}{z}.$$

Damit ist der Gradient

$$F'(x,y,z) = \left(-\frac{\sin(xz)}{x}\ ,\ \frac{\sin(yz)}{y}\ ,\ \frac{\sin(yz)-\sin(xz)}{z}\right)^\top.$$

Mit diesem Resultat bekommen wir die gesuchte Ableitung, indem wir g mit der Funktion $\psi(s) = (1/s, s^2, s)$ kombinieren. Die Kettenregel liefert uns für

$$f(s) = g(\psi(s)) = g(1/s, s^2, s),$$

die Ableitung

$$\begin{aligned}f'(s) = g'(1/s, s^2, s)\,(-1/s^2, 2s, 1)^\top &= \nabla g(1/s, s^2, s)\cdot(-1/s^2, 2s, 1)^\top\\ &= \frac{\sin(1)}{s} + \frac{2\sin(s^3)}{s} + \frac{\sin(s^3)-\sin(1)}{s} = \frac{3\sin(s^3)}{s}.\end{aligned}$$

Problem 60: Mr K. hikes around in the black forest, the topography of which can be described by the scalar function

$$f(x,y) = x^2y - xy^2 + 3xy - 5x^2 + 10x + 5y^2 - 40y + 500,$$

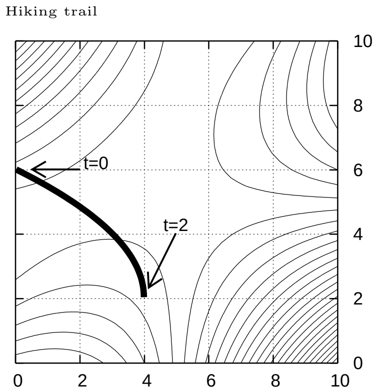
where $x, y \in [0,10]$ are coordinates (given in kilometers) and $f(x,y)$ indicates the altitude. During the first two hours, $t \in [0,2]$, his way runs along the function $c(t) = (x,y)^\top = (4t - t^2, 6 - 2t)^\top$.

(a) Find the gradient of f.

(b) Show that $x = 5$ and $y = 5$ are two contour lines by verifying that f is constant there. Show also that the gradient is orthogonal to these contour lines.

(c) Determine the hiking velocity $\|c'(t)\|$ and hiking direction $r(t) = \frac{1}{||c'(t)||} c'(t)$ of Mr K., at time t and the slope of the way for $t = 1$, i.e. the directional derivative of f with respect to the hiking direction on $c(1)$.

(d) Give the derivative of function $f \circ c$ by means of chain rule. What is the vertical velocity of Mr K. at $t = 1$?



Lösung 60:

(a) Die partiellen Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy - y^2 + 3y - 10x + 10\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 2xy + 3x + 10y - 40$$

somit lautet der Gradient:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - y^2 + 3y - 10x + 10 \\ x^2 - 2xy + 3x + 10y - 40 \end{pmatrix}$$

(b) Zunächst einmal setzen wir $x = 5$ ein und erhalten

$$f(5,y) = 25y - 5y^2 + 15y - 125 + 50 + 5y^2 - 40y + 500 = 425\,,$$

also bezeichnet $x = 5$ die Höhenlinie zu 425m und auf $y = 5$ ist

$$f(x,5) = 5x^2 - 25x + 15x - 5x^2 + 10x + 125 - 200 + 500 = 425\,,$$

somit ist es ebenfalls eine Höhenlinie zu 425m. Die Gradienten lauten

$$\begin{aligned} \nabla f(5,y) &= \begin{pmatrix} 10y - y^2 + 3y - 50 + 10 \\ 25 - 10y + 15 + 10y - 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2 + 13y - 40 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \nabla f(x,5) &= \begin{pmatrix} 10x - 25 + 15 - 10x + 10 \\ x^2 - 10x + 3x + 50 - 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 - 7x + 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und diese sind tatsächlich senkrecht auf $(0,1)^\top$, bzw. $(1,0)^\top$, den Richtungen der Linien $x = 5$ und $y = 5$.

(c) Für $c'(t)$ erhalten wir

$$c'(t) = \begin{pmatrix} 4 - 2t \\ -2 \end{pmatrix},$$

mit Norm $\|c'(t)\| = \sqrt{4t^2 - 16t + 20}$. Damit ist die normierte Wanderrichtung

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2 - 16t + 20}} \begin{pmatrix} 4 - 2t \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Der Gradient auf dem Wanderweg ist

$$\begin{aligned} \nabla f(c(t)) &= \begin{pmatrix} 2(4t - t^2)(6 - 2t) - (6 - 2t)^2 + 3(6 - 2t) - 10(4t - t^2) + 10 \\ (4t - t^2)^2 - 2(4t - t^2)(6 - 2t) + 3(4t - t^2) + 10(6 - 2t) - 40 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4t^3 - 22t^2 + 26t - 8 \\ t^4 - 12t^3 + 41t^2 - 56t + 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit ist die Richtungsableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial g}(c(t)) &= r(t) \cdot \nabla f(c(t)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4t^2 - 16t + 20}} \big((4 - 2t)(4t^3 - 22t^2 + 26t - 8) - 2(t^4 - 12t^3 + 41t^2 - 56t + 20)\big) \\ &= \frac{-10t^4 + 84t^3 - 222t^2 + 232t - 72}{\sqrt{4t^2 - 16t + 12}}\,. \end{aligned}$$

Der Anstieg zu $t = 1$ ist damit $3\sqrt{2} \approx 1.06$ Höhenmeter pro Kilometer.

(d) Für die Ableitung gilt nach der mehrdimensionalen Kettenregel

$$\begin{aligned} (f \circ c)'(t) &= f'(c(t))c'(t) \\ &= (4t^3 - 22t^2 + 26t - 8, t^4 - 12t^3 + 41t^2 - 56t + 20) \cdot \begin{pmatrix} 4-2t \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= -10t^4 + 84t^3 - 222t^2 + 232t - 72\,. \end{aligned}$$

Damit ist seine Anstiegsgeschwindigkeit zu $t = 1$ gerade 12 Höhenmeter pro Stunde.