1st Worksheet (with solutions)

Problem 1: Consider the initial value problem

$$0 = (x+1)y'(x) + 2y(x) - 1, \quad y(0) = \frac{3}{2}.$$

(a) Determine the general solution of the homogeneous differential equation $0 = (x+1)y'(x) + 2y(x)$.

(b) Determine the general solution of the inhomogeneous differential equation and solve the initial value problem.

Lösung 1:

(a) Eine Variablentrennung führt auf die Gleichung

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{2}{x+1},$$

und durch Integration erhalten wir

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| = -2\int \frac{dx}{x+1} = -2\ln|x+1| + C.$$

Also erhalten nach Umbenennung der Konstanten die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_h(x) = \frac{D}{(x+1)^2}$$

mit einer Konstanten $D \in \mathbb{R}$.

(b) Wir bestimmen die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit Hilfe der Variation des Konstanten: Es sei

$$y(x) = \frac{D(x)}{(x+1)^2}$$

und damit

$$y'(x) = \frac{D'(x)}{(x+1)^2} - 2\frac{D(x)}{(x+1)^3}.$$

Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhalten wir

$$\frac{D'(x)}{(x+1)^2} - 2\frac{D(x)}{(x+1)^2} + 2\frac{D(x)}{(x+1)^2} \overset{!}{=} 1,$$

also ist $D'(x) = x+1$, bzw. $D(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$. Wir erhalten als allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

mit noch unbekannter Konstante $C \in \mathbb{R}$. Setzen wir den Anfangswert ein, so muss $C = \frac{3}{2}$ sein und die Lösung des Anfangswertproblem lautet

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\frac{1}{2}x^2 + x}{(x+1)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Problem 2: Determine the general solution of the following differential equations:

(a) $y'(x) = 2xy(x)$,

(b) $y'(x) = 2y^2(x) + 2 + y^2(x)x + x$,

(c) $xy'(x) = y(x) + xe^{-\frac{y(x)}{x}}$ using the substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Lösung 2:

(a) Diese Differentialgleichung löst man über Variablentrennung: Aus $\frac{dy}{dx} = 2xy$ folgt für $y \neq 0$:

$$\frac{1}{y}dy = 2xdx$$

Durch Integration beider Seiten erhält man

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| = \int 2xdx = x^2 + C$$

und somit

$$y = \pm e^{(x^2+C)} = D \cdot e^{(x^2)}\,.$$

Zusätzlich gibt es den Fall $y = 0$, der auch Lösung ist, und durch den Term für $D = 0$ auch erfasst wird.

(b) Auch hier kann man eine Variablentrennung durchführen:

$$\frac{dy}{dx} = 2y^2 + 2 + y^2x + x = y^2(2+x) + (2+x) = (y^2+1)(2+x)$$

und erhält

$$\frac{1}{1+y^2}dy = (2+x)dx\,.$$

Dies kann nun integriert werden:

$$\int \frac{1}{1+y^2}dy = \arctan(y) = \int (2+x)dx = 2x + \frac{x^2}{2} + C$$

Die allgemeine Lösung lautet damit $y = \tan(\frac{x^2}{2} + 2x + C)$. Hier muss man keinen weiteren Fall betrachten, da $1 + y^2$ für reelle y immer positiv ist.

(c) Für $x \neq 0$ gilt: $y' = \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}$, solche Differentialgleichungen kann man mit der Substitution $z(x) = \frac{y}{x}$, bzw. $y = xz$ lösen: Dann ist $y' = z + xz'$ und wir gelangen zur Differentialgleichung $z + xz' = z + e^{-z}$ bzw. $\frac{dz}{dx} = \frac{e^{-z}}{x}$ und nach Variablentrennung $\int e^z dz = e^z = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ und somit $z = \frac{y}{x} = \ln(\ln|x| + C)$ und letztendlich $y = x\ln(\ln|x| + C)$.

Problem 3: Determine the type of the differential equation and solve the initial value problem

$$y^3(x) - x^2 + xy^2(x)y'(x) = 0, \qquad y(1) = 1.$$

Lösung 3: Wir teilen die Gleichung durch $(y(x))^2$ und finden eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = -2$. Wenn wir also $u(x) = (y(x))^3$ setzen, finden wir die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$u(x) - x^2 + \frac{x}{3}u'(x) = 0, \qquad u(1) = 1.$$

Zunächst lösen wir wir üblich die zugehörige homogene Differentialgleichung $u(x) + \frac{x}{3}u'(x) = 0$, oder

$$u'(x) = -\frac{3}{x}u(x),$$

was mit einer Division durch u und Integration beider Seiten auf

$$\ln|u| = -3\ln|x| + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

führt. Wir wenden auf beiden Seiten die Exponentialfunktion an, was

$$|u| = e^C|x|^{-3} \qquad \text{oder} \qquad u = \pm e^C x^{-3}$$

liefert. Der Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also $u(x) = C(x)x^{-3}$. Nach Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung ergibt sich $C'(x) = 3x^4$, also $C(x) = 3/5\ x^5 + \alpha$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$u(x) = C(x)x^{-3} = \frac{3}{5}x^2 + \frac{\alpha}{x^3}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Wir passen jetzt noch den Anfangswert an: Für $x = 1$ ist $u(1) = \frac{3}{5} + \alpha \overset{!}{=} 1$, also $\alpha = 2/5$. Schließlich ist

$$y(x) = \left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5x^3}\right)^{1/3}, \qquad x > 1$$

die Lösung des Anfangswertproblems. Beachte, dass das Wurzelziehen ok ist, da der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist.

Problem 4: Determine the type and the solutions of the following initial value problems:

(a) $y'(x) = \dfrac{1}{1-x} y(x) + x - 1, \quad x > 1, \quad y(2) = 0,$

(b) $y'(x) = \sqrt{1 - y^2(x)}, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}.$

Lösung 4:

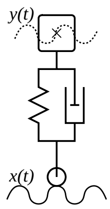
(a) Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'(x) = \frac{1}{1-x} y(x)$ ist $y_h(x) = Ce^{-\ln(x-1)} = C\frac{1}{x-1}$, da $x > 1$. Eine partikuläre Lösung für die inhomogene Differentialgleichung bekommen wir mit Variation der Konstanten: $y'(x) = C'(x)\frac{1}{x-1} - C(x)\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{1-x}\frac{C(x)}{x-1} + x - 1$, also $C'(x) = (x-1)^2$, $C(x) = (x-1)^3/3$ und damit $y_p(x) = (x-1)^2/3$. Also

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{C}{x-1} + \frac{(x-1)^2}{3}.$$

Die Anfangsbedingung impliziert $0 = C + 1/3$, daher $C = -1/3$ und somit ist $y(x) = \frac{1}{3}((x-1)^2 - \frac{1}{x-1})$ die Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Das ist eine autonome Differentialgleichung: $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$, also $\arcsin y = x + c$, d.h. $y(x) = \sin(x+c)$, $-\pi/2 - c \leq x \leq \pi/2 - c$. Die Anfangsbedingung $\frac{1}{2} = \sin(0 + c)$ liefert $c = \pi/6$.

Problem 5: On his daily trip to the University, Mr. H. passes various cobblestone pavement paths with his bicycle. He would like to calculate the amplitude of the pavement $x(t)$ from the vertical body movement $y(t)$.
We model the situation as follows: let the weight of Mr. H. be 100 kg, simplify the bycicle to a unicycle, and let the tyre be a parallel connection of spring with 1500 $\frac{N}{m}$ and damper with 500 $\frac{kg}{s}$. The balance of forces leads to the equation in canceled form



$$-my''(t) - b(y'(t) - x'(t)) - c(y(t) - x(t)) = 0$$

where $m = 1$, $b = 5$ and $c = 15$ are unitless constants.

(a) Propose and solve the homogeneous differential equation for $x(t)$. What is the behaviour of $x(t)$ for $t \to \infty$?

(b) Propose now the inhomogeneous differential equation for $x(t)$ for two different pavement paths, where $y_1(t) = \sin(t)$ and $y_2(t) = \sin(2t)$.

(c) Determine the particular solution of the inhomogeneous differential equation using the ansatz

$$x_1(t) = A_1 \sin(t) + B_1 \cos(t) \qquad \text{and} \qquad x_2(t) = A_2 \sin(2t) + B_2 \cos(2t)$$

respectively. Is the assumption of Mr. H. right that the pavement of the second path features a bigger amplitude than the first one for $t \to \infty$?

Lösung 5:

(a) Wir setzen die Werte ein und stellen die Differentialgleichung um:

$$5x'(t) + 15x(t) = y''(t) + 5y'(t) + 15y(t)$$

Damit lautet die homogene Differentialgleichung:

$$x'(t) + 3x(t) = 0$$

Durch Variablentrennung oder der Lösungsformel aus dem Skript erhalten wir die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x(t) = C\,e^{-3t}$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Unabhängig von der Konstanten erhalten wir ein Abfallverhalten für $x \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 0$$

Wir sehen also, dass wenn sich der Hintern länger nicht bewegt, dann kann es auch keine Huckel auf der Straße geben.

(b) Um die inhomogenen Differentialgleichungen zu bestimmen, benötigen wir die Ableitungen der $y_1(t)$ und $y_2(t)$:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \sin(t)\,, & y_1'(t) &= \cos(t)\,, & y_1''(t) &= -\sin(t)\,, \\ y_2(t) &= \sin(2t)\,, & y_2'(t) &= 2\cos(2t)\,, & y_2''(t) &= -4\sin(2t) \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die umgestellte Differentialgleichung erhalten wir für y_1 die Gleichung

$$5x_1'(t) + 15x_1(t) = -\sin(t) + 5\cos(t) + 15\sin(t) = 14\sin(t) + 5\cos(t)$$

und für y_2

$$5x_1'(t) + 15x_1(t) = -4\sin(2t) + 10\cos(2t) + 15\sin(2t) = 11\sin(2t) + 10\cos(2t)\,.$$

(c) Um die Ansätze zu verwenden, brauchen wir auch die Ableitungen:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= A_1\cos(t) - B_1\sin(t) \\ x_2'(t) &= 2A_2\cos(2t) - 2B_2\sin(2t) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen des ersten Ansatzes in die erste inhomogene Differentialgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} 5A_1\cos(t) - 5B_1\sin(t) + 15A_1\sin(t) + 15B_1\cos(t) &= (15A_1 - 5B_1)\sin(t) + (5A_1 + 15B_1)\cos(t) \\ &\overset{!}{=} 14\sin(t) + 5\cos(t)\,. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $15A_1 - 5B_1 = 14$ und $5A_1 + 15B_1 = 5$ und nach Lösung des Gleichungssystems erhalten wir $A_1 = \frac{47}{50}$ und $B_1 = \frac{1}{50}$. Die allgemeine Lösung als Summe von partikulärer und homogener Lösung lautet

$$x_1(t) = \frac{47}{50}\sin(t) + \frac{1}{50}\cos(t) + Ce^{-3t}\,.$$

Für $t \to \infty$ hat diese Funktion eine Amplitude von $\frac{1}{50}\sqrt{2210} \approx 0.94$. Mit dem zweiten Ansatz erhalten wir mit der zweiten inhomogenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 10A_2\cos(2t) - 10B_2\sin(2t) + 15A_2\sin(2t) + 15B_2\cos(2t) &= (15A_2 - 10B_2)\sin(2t) + (10A_2 + 15B_2)\cos(2t) \\ &\overset{!}{=} 11\sin(2t) + 10\cos(2t)\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten $15A_2 - 10B_2 = 11$ und $10A_2 + 15B_2 = 10$ mit den Lösungen $A_2 = \frac{53}{65}$ und $B_2 = \frac{8}{65}$. Die allgemeine Lösung lautet hier

$$x_2(t) = \frac{53}{65}\sin(2t) + \frac{8}{65}\cos(2t) + e^{-3t}\,.$$

Für $t \to \infty$ erhalten wir eine Amplitude von $\frac{1}{65}\sqrt{2873} \approx 0.82$, also ist die Vermutung falsch- zwar hat das Pflaster im zweiten Fall eine höhere Frequenz, aber die Bodenwellen sind tatsächlich flacher.

Das Modell dieser Aufgabe stammt aus dem Buch *Mathematische Methoden der Technischen Mechanik* von M. Riemer, J. Wauer, W. Wedig.