2nd Worksheet (with solutions)

Problem 6: Let

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

be vectors in $\mathbb{R}^4$.

(a) Compute the following linear combinations: $u + v - z$, $2v - (w - z)$, $2u - v + 2w$.

(b) Show that the vectors u, v, w are a basis of the subspace $\operatorname{span}\{u, v, w\}$.

(c) What is the dimension of the subspace $\operatorname{span}\{u, v, w, z\}$?

Lösung 6:

(a) $u+v-z = (1, -4, -1, 2)^\top$, $\quad 2v - (w-z) = 2v - w + z = (7, 1, 8, -6)^\top$, $\quad 2u - v + 2w = (-2, -2, -3, 3)^\top = -z$.

(b) Setze $\lambda u + \mu v + \nu w = 0$, λ, μ, $\nu \in \mathbb{R}$. Aus der Gleichung für die vierte Koordinate folgt $\mu = \nu$, und damit haben wir noch

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Mit der Gleichung für die erste Koordinate folgt $\lambda = -\mu$ und Einsetzen liefert dann $\lambda = 0$. Also ist $\lambda = \mu = \nu = 0$. Die Vektoren sind demnach linear unabhängig und bilden damit eine Basis des von ihnen aufgespannten Untervektorraums.

(c) Mit Teilaufgabe (a) folgt das $z \in \operatorname{span}\{u, v, w\}$ ist. Deshalb ist $\operatorname{span}\{u, v, w\} = \operatorname{span}\{u, v, w, z\}$. Nach Teilaufgabe (b) sind u, v, w aber linear unabhängig, die Dimension des von ihnen aufgespannten Teilraums ist damit gleich ihrer Anzahl, also 3.

Problem 7: Determine all linear combinations of

(a) $a^{(1)} = (4, 1, 1)^\top$, $a^{(2)} = (1, 2, 3)^\top$, $a^{(3)} = (5, 6, 7)^\top$,

(b) $b^{(1)} = (2, 1, 1)^\top$, $b^{(2)} = (1, -1, 6)^\top$, $b^{(3)} = (5, 1, 8)^\top$,

(c) $c^{(1)} = (5, 1, 4)^\top$, $c^{(2)} = (4, 1, 3)^\top$, $c^{(3)} = (-1, 3, -4)^\top$

which describe $x = (3, 1, 2)^\top$.

Lösung 7:

Die Frage, ob ein Vektor x als Linearkombination von $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ dargestellt werden kann, also für welche α_1, α_2, α_3 die Bedingung

$$\alpha_1 y^{(1)} + \alpha_2 y^{(2)} + \alpha_3 y^{(3)} = x$$

erfüllt ist, führt auf ein lineares Gleichungssystem mit den $y^{(i)}$ in den Spalten und x auf der rechten Seite.

(a) $$\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & 5 & 3 \\ \boxed{1} & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} 0 & -7 & -19 & -1 \\ \mathbf{1} & 2 & 6 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & \boxed{-12} & 6 \\ \mathbf{1} & 0 & 4 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{1}{2} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{3}{2} \end{array}$$

Also ist $x = a^{(1)} + \frac{3}{2} a^{(2)} - \frac{1}{2} a^{(3)}$ eindeutig durch $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ und $a^{(3)}$ darstellbar, es gilt $\dim(\operatorname{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\}) = 3$.

(b) $$\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 5 & 3 \\ \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 8 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} 0 & \boxed{3} & 3 & 1 \\ \mathbf{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} 0 & \mathbf{1} & 1 & \frac{1}{3} \\ \mathbf{1} & 0 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{array} \rightarrow \text{Keine Lösung,}$$

d.h. $x \notin \{b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}\}$ und $\dim(\operatorname{span}\{b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}\}) = 2$.

(c) $$\begin{array}{rrr|r} 5 & 4 & -1 & 3 \\ \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & -4 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} 0 & \boxed{-1} & -16 & -2 \\ \mathbf{1} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -16 & -2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} 0 & \mathbf{1} & 16 & 2 \\ \mathbf{1} & 0 & -13 & -1 \end{array}$$

Also gilt $x = (-1 + 13\alpha_3) c^{(1)} + (2 - 16\alpha_3) c^{(2)} + \alpha_3 c^{(3)}$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ und wir haben unendlich viele Darstellungen. Es ist $x \in \{c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}\}$ und $\dim(\operatorname{span}\{c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}\}) = 2$.

Problem 8: Consider the plane $E: 4x_1 + x_3 + 8 = 0$, the point $P = (2|1|1)$ and the line $H: x(\lambda) = (4, 3, -2)^\top + \lambda(3, 1, -1)^\top$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Determine a line G through P that is orthogonal to E.

(b) Determine the distance from P to E as well as the point Q in E closest to P.

(c) Determine the point at which the line H intersects E and the point R on H, that is closest to P.

Lösung 8:

(a) Der Richtungsvektor der gesuchten Gerade G ist der Normalenvektor $n = (4, 0, 1)^\top$ der Ebene E. Die Gerade ist also

$$G: x(\mu) = \overrightarrow{OP} + \mu \cdot n = (2, 1, 1)^\top + \mu\,(4, 0, 1)^\top, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

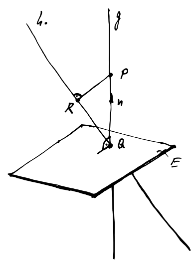
(b) Da G senkrecht auf E steht, ist offensichtlich der gesuchte Lotfußpunkt Q genau der Schnittpunkt $G \cap E$. Einsetzen liefert

$$0 = 4x_1 + x_3 + 8 = 4(2 + 4\mu) + (1 + \mu) + 8 = 17 + 17\mu,$$

also $\mu = -1$. Demnach ist $Q = (-2, 1, 0)^\top$. Der Verbindungsvektor von Q nach P ist demnach $(4, 0, 1)$, der Abstand von E zu P ist genau die Länge dieses Vektors, also $\sqrt{17}$. Alternativ, mit der Hesseschen Normalform von E,

$$d(P, E) = \left| \frac{4 \cdot 2 + 1 + 8}{\sqrt{17}} \right| = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}.$$

(c) Den Schnittpunkt von H und E errechnet man leicht durch Ausrechnen,



$$0 = 4x_1 + x_3 + 8 = 4(4 + 3\lambda) + (-2 - \lambda) + 8 = 22 + 11\lambda,$$

also $\lambda = -2$. Der Schnittpunkt ist demnach $(-2, 1, 0)$, also gerade wieder Q.
Damit ist der Vektor $\overrightarrow{QR}$ gerade die Orthogonalprojektion von $\overrightarrow{QP}$ auf H (beachte, dass man den Richtungsvektor von H normieren muss, $(1/\sqrt{11})\,(3, 1, -1)^\top$):

$$\overrightarrow{QR} = \frac{1}{11} \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\,(12 + 0 - 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $R = (1, 2, -1)^\top$.

Problem 9: Let the points $P = (2|1|0)$, $Q = (1|3|-1)$ and $R = (0|2|0)$ be given.

(a) Represent the plane E through the points P, Q and R in both parametric and normal form.

(b) Does the line $G: x(u) = (-2, -7, 0)^\top + u(3, 2, 1)^\top$ intersect the plane E? If so determine the point and angle of intersection.

(c) Compute the orthogonal projection of the direction vector $(3, 2, 1)^\top$ of the line G onto the normal vector of the plane E. Using this and the intersection point of G and E determine the projection H of the line G onto E.

Lösung 9:

(a) Die Parameterdarstellung der Ebene E wird durch

$$E: x\,(t, v) = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{QP} + v\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Um die Normalform

$$x \cdot n = d$$

zu bestimmen, brauchen wir den Normalenvector n, der auf den Richtungsvektoren $\overrightarrow{QP}$ sowie $\overrightarrow{RP}$ senkrecht steht. Mit dem Ansatz $n = (a, b, c)^\top$ bekommen wir das System

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a - 2b + c \text{ und } 0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2a - b.$$

Aus der zweiten Gleichung schließen wir $b = 2a$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt dann $c = 2b - a = 3a$. Wir wählen $a = 1$ und erhalten $n = (1, 2, 3)^\top$. Jetzt fehlt uns für die Normalform noch der Parameter d. Wir setzen den Punkt P ein und erhalten

$$d = \overrightarrow{OP} \cdot n = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4.$$

Die Ebene wird also durch

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x \cdot n = 4 \tag{1}$$

gegeben. Um Hessesche Normalform zu gewinnen müssen wir den Vektor n noch normieren, d.h. n durch

$$\widehat{n} = \frac{n}{\|n\|} = (1, 2, 3)^\top / \sqrt{1 + 4 + 9} = (1, 2, 3)^\top / \sqrt{14}$$

ersetzen. Das ergibt die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{14}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{14}} x_2 + \frac{3}{\sqrt{14}} x_3 = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

(b) Wir setzen $x(u)$ in (1) ein und erhalten

$$4 = x(u) \cdot n = \left[(-2, -7, 0)^\top + u(3, 2, 1)^\top\right] \cdot (1, 2, 3)^\top = -16 + 10u.$$

Daraus finden wir $u = 20/10 = 2$. Der Schnittpunkt S wird durch

$$\overrightarrow{OS} = (-2, -7, 0)^\top + 2(3, 2, 1)^\top = (4, -3, 2)^\top$$

gegeben. Jetzt bestimmen wir den Winkel φ zwischen g und n :

$$\cos\varphi = \frac{(3, 2, 1)^\top \cdot (1, 2, 3)^\top}{\|(3, 2, 1)^\top\| \left\|(1, 2, 3)^\top\right\|} = \frac{10}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{5}{7}.$$

Der gesuchte Winkel zwischen G und E ist also $\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{5}{7}$.

(c) Der Normalenvektor lautet $n = (1, 2, 3)^\top$ mit $||n|| = \sqrt{14}$, für die Projektion p des Vektors $(3, 2, 1)^\top$ erhalten wir

$$p = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{14}\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die auf E projizierte Gerade hat damit den Richtungsvektor $(3, 2, 1)^\top - \frac{5}{7}(1, 2, 3)^\top = \frac{1}{7}(16, 4, -8)^\top$ und wir erhalten mit dem Schnittpunkt als Aufpunkt das Ergebnis

$$H: \ x(v) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}, \ v \in \mathbb{R}.$$

Problem 10: $C[0, 1]$ denotes the vector space of continuous functions on the closed interval $[0, 1]$. Let U be a subspace of $C[0, 1]$ spanned by two polynomials $b^{(1)}(x) = 1$ and $b^{(2)}(x) = x - \frac{1}{2}$. We define $y(x) := \sqrt{x} \in C[0, 1]$ and the scalar product of two functions by

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx \in \mathbb{C}.$$

(a) Find a linear combination $c = a_1 b^{(1)} + a_2 b^{(2)} \in U$, such that $c(0) = y(0)$ and $c(1) = y(1)$.

(b) Determine $d \in U$ with smallest distance to y, i.e. the distance vector $e = d - y$ must be orthogonal to $b^{(1)}$ and $b^{(2)}$. Draw the graphs of y and the approximations c and d of it in $[0, 1]$ in a figure.
Remark: The Finite Element Method includes the computing of orthogonal approximations like d.

Lösung 10:

(a) Es gilt $c(x) = a_1 - \frac{1}{2}a_2 + a_2 x$. Aus $c(0) = y(0) = 0$ erhalten wir die Gleichung $a_1 - \frac{1}{2}a_2 = 0$ und aus $c(1) = y(1) = 1$ die Gleichung $a_1 + \frac{1}{2}a_2 = 1$. Das Gleichungssystem hat die Lösung $a_1 = \frac{1}{2}$ und $a_2 = 1$, also ist $c(x) = x$.

(b) Sei $d(x) = \tilde{a}_1 - \frac{1}{2}\tilde{a}_2 + \tilde{a}_2 x$, dann ist $e(x) = \tilde{a}_1 - \frac{1}{2}\tilde{a}_2 + \tilde{a}_2 x - \sqrt{x}$. Damit e senkrecht auf $b^{(1)}$ und $b^{(2)}$ steht, sollen die Skalarprodukte 0 sein:

$$\langle e, b^{(1)} \rangle = 0 \qquad \text{und} \qquad \langle e, b^{(2)} \rangle = 0$$

Die Berechnung des ersten Skalarprodukts

$$\begin{aligned}
\langle e, b^{(1)} \rangle &= \int_0^1 \left(\tilde{a}_1 - \frac{1}{2}\tilde{a}_2 + \tilde{a}_2 x - \sqrt{x} \right) 1 \, dx \\
&= \left[(\tilde{a}_1 - \frac{1}{2}\tilde{a}_2) x + \frac{1}{2}\tilde{a}_2 x^2 - \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 \\
&= \tilde{a}_1 - \frac{1}{2}\tilde{a}_2 + \frac{1}{2}\tilde{a}_2 - \frac{2}{3} \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

liefert $\tilde{a}_1 = \frac{2}{3}$. Mit dem zweiten Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
\langle e, b^{(2)} \rangle &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\tilde{a}_2 + \tilde{a}_2 x - \sqrt{x} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\tilde{a}_2 + \left(\frac{2}{3} - \tilde{a}_2 \right) x + \tilde{a}_2 x^2 - x\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \right) dx \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\tilde{a}_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \tilde{a}_2 \right) + \frac{1}{3}\tilde{a}_2 - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{15} + \frac{1}{12}\tilde{a}_2 \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

erhalten wir $\tilde{a}_2 = \frac{4}{5}$ und somit ist $d(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{15} + \frac{4}{5}x$.

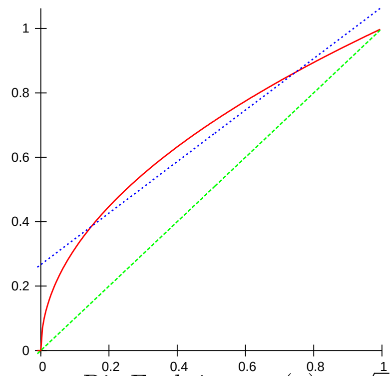
(Info) Die Funktionen $b^{(1)}$ und $b^{(2)}$ sind orthogonal zueinander:

$$\langle b^{(1)}, b^{(2)} \rangle = \int_0^1 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right]_0^1 = 0$$

Damit kann man die Koeffizienten $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ auch ohne lineare Gleichungssystem über Projektionen ausrechnen, denn es gilt dann:

$$\tilde{a}_1 = \frac{\langle b^{(1)}, y \rangle}{\langle b^{(1)}, b^{(1)} \rangle} = \frac{\frac{2}{3}}{1} \qquad \tilde{a}_2 = \frac{\langle b^{(2)}, y \rangle}{\langle b^{(2)}, b^{(2)} \rangle} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{12}} = \frac{4}{5}$$

Wir erhalten die Projektionen $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}(x - \frac{1}{2})$ und in der Summe genau die Funktion d. Leider sind die Basisfunktionen bei finiten Elementen nicht orthogonal zueinander, aber bei Fourierreihen werden wir diese Technik nutzen können.



Die Funktionen $y(x) = \sqrt{x}$ und die Näherungen $c(x) = x$ und $d(x) = \frac{4}{15} + \frac{4}{5}x$.