3rd Worksheet (with solutions)

Problem 11: Consider the three matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Decide which of the following products are defined and compute them if possible:

$$AB, BA^\top, CA, CA^\top, C^\top A^\top, B^\top C^\top A^\top, (BA^\top)^\top C^\top, (CB)^\top A.$$

Lösung 11: Erst schreiben wir die transponierten Matrizen auf

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \; B^\top = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \; C^\top = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es existieren folgende Produkte:

$$BA^\top = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C^\top A^\top = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad B^\top C^\top A^\top = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix},$$

$$(BA^\top)^\top C^\top = AB^\top C^\top = \begin{pmatrix} -13 & 15 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem 12: Let

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad y = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$$

be vectors in $\mathbb{R}^2$ with a parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. We are looking for a matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, such that $Ax = y$ and $Ay = x$. For which α can such A be uniquely determined? Compute the matrix for this case. Compute also its inverse A^{-1} if it exists.

Lösung 12: Eine Matrix im $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hat vier Einträge, für diese können wir aus den Bedingungen vier Gleichungen bestimmen:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} \\ a_{21} + 2a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix} = y, \text{ d.h. } \begin{array}{rcl} a_{11} + 2a_{12} & = & \alpha \\ a_{21} + 2a_{22} & = & 2 \end{array}$$

$$Ay = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + 2a_{12} \\ \alpha a_{21} + 2a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x, \text{ d.h. } \begin{array}{rcl} \alpha a_{11} + 2a_{12} & = & 1 \\ \alpha a_{21} + 2a_{22} & = & 2 \end{array}$$

Diese Gleichungen können wir mit dem Gauß-Algorithmus lösen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 2-2\alpha & 0 & 0 & 1-\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ 0 & 2-2\alpha & 0 & 0 & 1-\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2\alpha & 2-2\alpha \end{array}\right)$$

Jetzt gibt es zwei Fälle: Wenn $2 - 2\alpha = 0$ also $\alpha = 1$, so reduzieren sich die letzten beide Gleichungen zu $0 = 0$. Damit könnten a_{12} und a_{22} frei gewählt werden, und das Resultat wäre nicht eindeutig.
Deswegen setzen wir wir nun den Fall $\alpha \neq 1$ voraus, teilen zur Übersicht die letzten beiden Gleichungen durch $2 - 2\alpha$ und führen den Algorithmus fort:

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right)$$

Für $\alpha \neq 1$ erhalten wir eine eindeutige Lösung, und diese lautet in Abhängigkeit von α:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Führt man den Gauß-Algorithmus zur Bestimmung der inversen Matrix durch, so erhält man

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

A ist also zu sich selbst invers! Das ist aber auch nicht sehr überraschend, wenn wir uns überlegen, wie die Matrix A konstruiert wurde: Wendet man auf die Ausgangsbedingungen $Ax = y$ und $Ay = x$ auf beiden Seiten jeweils die Inverse A^{-1} an, so erhalten wir $x = A^{-1}y$ und $y = A^{-}1x$, und damit erfüllt diese Matrix die gleichen Bedingungen und da sie eindeutig ist, muss $A = A^{-1}$ sein.

Problem 13: For 3 times kitchen duty (K) and once swabbing the deck (S), poor seaman Hein B. obtains one Euro (E) and a pudding (P) from his captain. Moreover, Hein gets a pudding for four hand made fishing rods (R) and once swabbing the deck. For two fishing rods and four fish (F) he can afford a lemonade (L) in the harbour bar. Finally, for α fish and one kitchen duty, his captain tells one of his thrilling cock-and-bull stories (G). Here, $\alpha \in \mathbb{R}$ is a parameter depending on the captain's mood. Find the matrix A_α representing the linear mapping $(E, P, L, G) \mapsto (K, S, R, F)$. For which α is this mapping invertible? If it is invertible, compute the inverse and describe its meaning for kitchen duty, swabbing, fishing rods and fish.

Lösung 13: Die lineare Abbildung, nennen wir sie $\Phi : (E, P, L, G)^\top \mapsto (K, S, R, F)^\top$, die Euro (E), Purpurpudding (P), Bärenlimo (L) und Geschichten (G) in Küchendienste (K), Deck schrubben (S), Angelruten (R) und Fische (F) umrechnet, beschreibt eine Abbildung eines vierdimensionalen Raumes in einen zweiten vierdimensionalen Raum. Wir wählen eine Basis im Urbildraum von Φ

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

steht für einen Euro, Null Purpurpudding, Null Bärenlimos und Null Geschichten. Analog steht $\mathbf{e}^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ für Null Euro, einen Purpurpudding, Null Bärenlimos und Null Geschichten, und $\mathbf{e}^{(3)}$ und $\mathbf{e}^{(4)}$ werden analog definiert. Wir wählen auch eine Basis im Bildraum:

$$\mathbf{f}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

steht für einen Küchendienst, Null mal Deck schrubben, Null Angelruten und Null Fische, $\mathbf{f}^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ steht für keinen Küchendienst, ein mal Deck schrubben, Null Angelruten und Null Fische, und analog definieren wir $\mathbf{f}^{(3)}$ und $\mathbf{f}^{(4)}$.
Laut Aufgabenstellung bildet Φ einen Euro (E) und einen Purpurpudding (P) ab auf 3 mal Küchendienst (K) und einmal Deck schrubben (S):

$$\Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Außerdem bildet Φ einen Purpurpudding ab auf einmal Deck schrubben und vier Angelruten:

$$\Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Daneben bildet Φ aber auch eine Bärenlimo aus der Hafenkneipe ab auf zwei Angelruten und vier Fische:

$$\Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Schliesslich bildet Φ eine Seemannsgeschichte auf α Fische und einen Küchendienst ab:

$$\Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Da Φ eine lineare Abbildung ist, können wir (2) von (1) abziehen und finden, dass

$$\Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Jetzt kennen wir die Bilder der vier Basisvektoren $\mathbf{e}^j$ unter Φ, $j = 1, \dots, 4$. Also ist die Abbildungsmatrix A_α gleich

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen ihre Inverse:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{3} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 8 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4/3 & 4/3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\alpha - 8/3} & -8/3 & 8 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{\alpha-8/3\neq 0}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4/3 & 4/3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{-8}{3\alpha-8} & \frac{24}{3\alpha-8} & \frac{-6}{3\alpha-8} & \frac{3}{3\alpha-8} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\alpha}{3\alpha-8} & \frac{-24}{3\alpha-8} & \frac{6}{3\alpha-8} & \frac{-3}{3\alpha-8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{4}{3} + \frac{32}{3}\frac{1}{3\alpha-8} & -4 - \frac{32}{3\alpha-8} & 1 + \frac{8}{3\alpha-8} & \frac{-4}{3\alpha-8} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{-8}{3\alpha-8} & \frac{24}{3\alpha-8} & \frac{-6}{3\alpha-8} & \frac{3}{3\alpha-8} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha}{3\alpha-8} & \frac{-8}{3\alpha-8} & \frac{2}{3\alpha-8} & \frac{-1}{3\alpha-8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2\alpha}{3\alpha-8} & \frac{-6\alpha}{3\alpha-8} & \frac{3\alpha}{6\alpha-16} & \frac{-2}{3\alpha-8} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{-8}{3\alpha-8} & \frac{24}{3\alpha-8} & \frac{-6}{3\alpha-8} & \frac{3}{3\alpha-8} \end{array}\right)$$

Auf der rechten Seite der Matrix steht jetzt die Inverse A^{-1}, die für $\alpha \neq 8/3$ existiert. Das Matrixprodukt $A^{-1}(k, s, a, f)^\top$ beschreibt, wieviel Euro, Purpurpudding, Bärenlimo und Geschichten Hein B. für k Küchendienste, s mal Deck schrubben, r Angelruten und f Fische bekommt. Hierbei ist $(k, s, a, f)^\top = k\mathbf{f}^{(1)} + s\mathbf{f}^{(2)} + r\mathbf{f}^{(3)} + f\mathbf{f}^{(4)}$ ein Vektor im $\mathbb{R}^4$.

Problem 14: Let $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & 7 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $b_1 = (1, 1, 1, 1)^\top$, $b_2 = (1, 0, -1, 0)^\top$ and $y = (1, 3, 5, 3)^\top$.

(a) Find b_3 and b_4 such that b_1, b_2, b_3 and b_4 are orthogonal to each other.

(b) Determine the vectors Ab_k and check if there is an α_k such that $Ab_k = \alpha_k b_k$, $k = 1, 2, 3, 4$.

(c) Write y as a linear combination of the vectors b_k, $k = 1, 2, 3, 4$, i.e. find the presentation $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = y$. Hint: scalar product and the orthogonality of b_k, $k = 1, 2, 3, 4$.

(d) Write x as a linear combination of vectors b_k, $k = 1, 2, 3, 4$ in $Ax = y$ by using α_k and λ_k .

Lösung 14:

(a)

- Lösen durch 'scharfes' Hinsehen
  Da wir die Vektoren b_1, b_2 in einfacher Form vorliegen haben, lassen sich b_3 und b_4 durch scharfes Hinsehen ermitteln.
  Sei $b_3 = (0, x, 0, y)^\top$, $x, y \in \mathbb{R}$, dann ist $b_3 \perp b_2$, klar. Falls $x = -y$, also $b_3 = (0, -y, 0, y)^\top$, so ist auch $b_3 \perp b_1$. Somit sind b_1, b_2, b_3 orthogonal! Für b_4 könnte man $b_4 = (-1, 1, -1, 1)^\top$ wählen. Man erkennt leicht, dass der Vektor b_4 senkrecht zu jedem der Vektoren b_1, b_2 und b_3 ist. Wir haben also

$$b_3 = (0, -1, 0, 1)^\top, \qquad b_4 = (-1, 1, -1, 1)^\top.$$

- Lösen mit Hilfe eines LGS und einer Orthogonalprojektion
  Diese Fragestellung kann man auch systematisch angehen. Zunächst suchen wir nach allen $c \in \mathbb{R}^4$, sodass $c \perp b_1$ und $c \perp b_2$. Es wird sich herausstellen, dass zu b_1 und b_2 eine ganze Ebene in $\mathbb{R}^4$ senkrecht ist. Die gesuchten Vektoren b_3 und b_4 lassen sich dann aus den Richtungsvektoren der Ebene u.a. mit Orthogonalprojektion ermitteln.
  Die obige Orthogonalitätsbedingung führt auf ein LGS für die Komponenen des Vektors c:

$$\begin{aligned} c_1 b_{1,1} + c_2 b_{1,2} + c_3 b_{1,3} + c_4 b_{1,4} &= 0 \\ c_1 b_{2,1} + c_2 b_{2,2} + c_3 b_{2,3} + c_4 b_{2,4} &= 0 \end{aligned}$$

  Die zugehörige Koeffizientenmatrix lautet

$$\begin{array}{cccc|c} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

Wir haben zwei lin. unabh. Gleichungen und vier Unbekannte, d.h. zwei davon sind bel. wählbar. Sei z.B. $c_1 = t \in \mathbb{R}$. Aus der 2. Gleichung folgt $c_1 = c_3 = t$. Wähle nun $c_2 = s \in \mathbb{R}$. Aus der 1. Glg. erhält man $t + s + t + c_4 = 0$, d.h. $c_4 = -2t - s$. Die Lösungsmenge ist also

$$\mathcal{L} = \{c \in \mathbb{R}^4 : c = t(1,0,1,-2)^\top + s(0,1,0,-1)^\top, t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Zu den Vektoren b_1 und b_2 ist also die ganze Ebene $\mathcal{L}$ senkrecht, d.h. auch, dass die vektoren b_3 bzw. b_4 nicht eindeutig bestimmbar sind. Nun bleibt es lediglich zwei zueinander senkrechte Vektoren aus $\mathcal{L}$ anzugeben/zu finden. Den ersten dürfen wir natürlich frei wählen. Sei also $b_3 = (1,0,1,-2)^\top$. Den Vektor b_4 können wir duch die Orthogonalprojektion des Richtungsvektors $a := (0,1,0,-1)^\top$ auf b_3 bestimmen (siehe Abbildung):

$$b_4 \;=\; a - \hat{a}, \qquad \text{wobei } \hat{a} \;=\; \frac{a \cdot b_3}{\|b_3\|^2} b_3.$$

Setzt man die Vektoren ein, so bekommt man schließlich

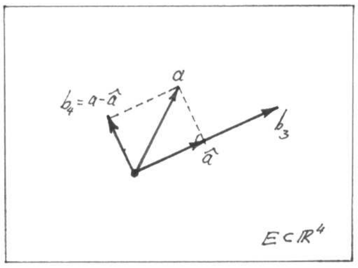


Abbildung 1: Bestimmung des Vektors b_4 durch Orthogonalprojektion des Vektores a auf den Vektor b_3

$$b_4 = (0,1,0,-1)^\top - \frac{1}{3}(1,0,1,-2)^\top \;=\; -\frac{1}{3}(1,-3,1,1)^\top.$$

(b) Aus (a) entscheiden wir uns für die Vektoren $b_3 = (0,-1,0,1)^\top$, $b_4 = (-1,1,-1,1)^\top$. Für die Matrix-Vektor-Produkte erhält man

$$Ab_1 = (1,1,1,1)^\top = b_1, \quad Ab_2 = (-1,0,1,0)^\top = -b_2, \quad Ab_3 = (0,-2,0,2)^\top = 2b_3, \quad Ab_4 = (-2,2,-2,2)^\top = 2b_4.$$

Wir haben also $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$ und $\alpha_4 = 2$.

(c) Wir betrachten die Gleichung $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = y$ und bilden das Skalarprodukt auf beiden Seiten mit den Vektoren b_k, $k = 1,2,3,4$.

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4) \cdot b_1 &= y \cdot b_1 \\
\lambda_1 b_1 \cdot b_1 &= y \cdot b_1, \quad \text{da } b_1 \cdot b_2 = 0 \text{ bzw. } b_1 \cdot b_3 = 0. \\
\lambda_1 \|b_1\|^2 &= y \cdot b_1 \\
\lambda_1 &= \frac{y \cdot b_1}{\|b_1\|^2} \quad \text{Hier wird } y \text{ auf } b_1 \text{ projeziert!} \\
\lambda_1 &= \frac{12}{4} = 3.
\end{aligned}$$

Durch SP der Gleichung mit b_k, $k = 2,3,4$ erhält man analog

$$\lambda_2 = \frac{y \cdot b_2}{\|b_2\|^2} = \frac{-4}{2} = -2, \qquad \lambda_3 = \frac{y \cdot b_3}{\|b_3\|^3} = \frac{0}{2} = 0, \qquad \lambda_4 = \frac{y \cdot b_4}{\|b_4\|^4} = \frac{0}{2} = 0.$$

Für y haben wir also die Darstellung $y = 3b_1 - 2b_2$.

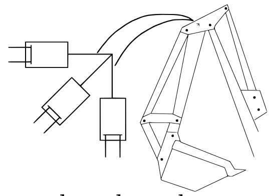
(d) Sei $x = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \gamma_3 b_3 + \gamma_4 b_4$, $\gamma_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,2,3,4$.

$$\begin{aligned}
Ax &= y \\
A(\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \gamma_3 b_3 + \gamma_4 b_4) &= 3b_1 - 2b_2 \\
\gamma_1 Ab_1 + \gamma_2 Ab_2 + \gamma_3 Ab_3 + \gamma_4 Ab_4 &= 3b_1 - 2b_2 \\
\gamma_1 b_1 - \gamma_2 b_2 + \gamma_3 2b_3 + \gamma_4 2b_4 &= 3b_1 - 2b_2.
\end{aligned}$$

Da b_1, b_2, b_3 und b_4 orthogonal sind, gilt $\gamma_1 = 3$, $\gamma_2 = 2$, $\gamma_3 = \gamma_4 = 0$. Auf diese Werte kommt man, indem man die Skalarprodukte der Gleichung mit den Vektoren b_k, $k = 1,2,3,4$ bildet. Für x haben wir also $x = 3b_1 + 2b_2 = (5,3,1,3)^\top$.

Problem 15: *By a measurement rosette (Dehnmessstreifen-Rosette) on a surface the extension state of a hydraulic shovel may be determined in the form of a strain tensor with respect to the x_1, x_2, x_3 coordinate system. We are interested in the principle strains (Hauptdehnungen) as they determine the maximal forces in the corresponding principle strain axes in isotropic materials. For the given tensor ε we will discuss the corresponding linear system with parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ given on the right:*

$$\varepsilon = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 142 & -144 & 0 \\ -144 & 58 & 0 \\ 0 & 0 & -125 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrrcl} 142x_1 & -144x_2 & & = & 50\lambda x_1 \\ -144x_1 & +58x_2 & & = & 50\lambda x_2 \\ & & -125x_3 & = & 50\lambda x_3 \end{array}$$



Determine the principle strains by computing all $\lambda \in \mathbb{R}$ such that the linear system has solutions other than the zero vector. For each λ, give a normed solution vector to the system of length 1 as corresponding principle strain axis. Determine the angles between the principle strain axes, discuss whether they form a basis of $\mathbb{R}^3$ and determine their angle to the standard basis.

Lösung 15: Bringen wir alle Variablen auf die linke Seite, so erhalten wir das folgende homogene LGS:

$$\begin{array}{rrrcl} (142-50\lambda)x_1 & -144x_2 & & = & 0 \\ -144x_1 & (+58-50\lambda)x_2 & & = & 0 \\ & & (-125-50\lambda)x_3 & = & 0 \end{array}$$

So ein homogenes LGS ist grundsätzlich lösbar durch $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, doch uns interessiert für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ wir weitere Lösungen erhalten können. Diese werden wir nur erhalten, wenn Zeilen verschwinden, da es nur dann mehr als die eine triviale Nulllösung gibt. Wir führen dazu einen Schritt des Gauß-Verfahren durch:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 142-50\lambda & -144 & 0 & 0 \\ \boxed{\text{-144}} & 58-50\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -125-50\lambda & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{625}{36}\lambda^2 - \frac{625}{9}\lambda - \frac{3125}{36} & 0 & 0 \\ \mathbf{-144} & 58-50\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -125-50\lambda & 0 \end{array}\right)$$

Damit ist erkennbar, dass jeweils eine Zeile wegfällt, wenn $\frac{625}{36}\left(\lambda^2 - 4\lambda - 5\right) = 0$ oder $-125 - 50\lambda = 0$.

1. Fall: $\lambda_1 = 5$

   Dann ist $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ und somit fällt die erste Zeile weg. Die verbleibenden Gleichungen lauten:

   $$-144x_1 - 192x_2 = 0 \quad \text{und} \quad -375x_3 = 0$$

   Also ist $x_3 = 0$ und $x_2 = -\frac{3}{4}x_1$, somit ist die Lösungsmenge $\operatorname{span}\{(-4,3,0)^\top\}$. Da $||(-4,3,0)^\top|| = 5$ lautet eine normierte Richtung $d_1 = \frac{1}{5}(-4,3,0)^\top$. In dieser Richtung liegt eine starke Dehnung vor.

2. Fall: $\lambda_2 = -1$

   Dann ist ebenfalls $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ und wieder fällt die erste Zeile weg. Die verbleibenden Gleichungen lauten:

   $$-144x_1 + 108x_2 = 0 \quad \text{und} \quad -75x_3 = 0$$

   Also ist $x_3 = 0$ und $x_2 = \frac{4}{3}x_1$, somit ist die Lösungsmenge $\operatorname{span}\{(3,4,0)^\top\}$. Da wieder $||(3,4,0)^\top|| = 5$ lautet eine normierte Richtung $d_2 = \frac{1}{5}(3,4,0)^\top$. In dieser Richtung haben wir eine Kompression.

3. Fall: $\lambda_3 = -5/2$

   Dann ist $-125 - 50\lambda = 0$ und nun wird die letzte Zeile zu 0. Die verbleibenden Gleichungen lauten:

   $$\frac{3125}{16}x_2 = 0 \quad \text{und} \quad -144x_1 + 183x_2 = 0$$

   Damit ist $x_2 = 0$ und so auch $x_1 = 0$ und x_3 beliebig. Die Lösungsmenge ist $\operatorname{span}\{(0,0,1)^\top\}$. Da $||(0,0,1)^\top|| = 1$ ist $d_3 = (0,0,1)^\top$ eine passende Dehnungshauptrichtung, in welcher ebenfalls eine Kompression gemessen wurde.

Da jeweils $d_1 \cdot d_2 = 0$, $d_1 \cdot d_3 = 0$ und $d_2 \cdot d_3 = 0$, sind die vom Nullvektor verschiedenen Dehnungshauptrichtungen senkrecht aufeinander und können nicht linear abhängig sein. Damit bilden diese drei Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Da der Vektor d_3 mit dem dritten Standardbasisvektor übereinstimmt, können wir die Basis $\{d_1, d_2, d_3\}$ Drehung der Standardbasis um die Drehachse d_3 auffassen. Als Winkel φ_1 zwischen d_1 und dem ersten Standardbasisvektor e_1 (bzw. e_2) berechnen wir:

$$\cos\varphi_1 = \frac{d_1 \cdot e_1}{||d_1||\,||e_1||} = \frac{-\frac{4}{5}}{1} = -\frac{4}{5}, \qquad \cos\varphi_2 = \frac{3}{5}$$

Dies entspricht etwa rund 36.9° bzw. 90° − 36.9° = 53.1°.

Anmerkungen: Zur Vereinfachung der Aufgabe wurden die Werte geschönt, realistisch wird der einheitenlose Verzerrungstensor nach Multiplikation mit 10^{-6}. Dadurch erhält man dann Hauptdehnungen in der Größenordnung von maximal 10^{-4}, und dies spiegelt wieder, dass Metalle fast inkompressibel sind: Die Summe der Hauptdehnungen entspricht der relativen Volumenänderung, und sollte bei Metallen sehr, sehr klein sein.

Die mathematische Bezeichnung der berechneten Hauptdehnungen λ sind **Eigenwerte** von ε, die zugehörigen Vektoren werden **Eigenvektoren** genannt. Diese werden nicht nur im zweiten Semester der Höheren Mathematik behandelt, sondern auch in sehr vielen Anwendungen verwendet, manchmal unter der Bezeichnung *Hauptachsen*. Die Verzerrungstensoren werden in der technischen Mechanik vorraussichtlich im zweiten Semester behandelt, dort werden Sie eine Lösungsformel für solche spezielle Verzerrungstensoren kennenlernen, deren Herkunft Sie an Hand dieser Aufgabe nachvollziehen können.

Vielen Dank an F.Fritzen am Institut für Technische Mechanik für die fachliche Unterstützung bei diesem Anwendungsbeispiel.