Worksheet No. 4
Advanced Mathematics II

Problem 16: Compute the determinant

$$D := \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(a) using the expansion rule across the 1st row,

(b) using the expansion rule across the last column,

(c) via Gaussian elimination.

Lösung 16:

(a) $$D = -3\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -5 & 2 & 2 \\ -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{nach 3.Spalte entw.}} -7\underbrace{\begin{vmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{Zeilenumformung}} = -3\left[-3\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}\right] - 7\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 18 & -3 \\ 0 & -5 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{nach 1.Spalte entw.}}$$

$$= -3[(-3)9 - 2(-3)] - 7\cdot 3\begin{vmatrix} 18 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-3)(-21) - 21\cdot 21 = -21\cdot 18 = -378.$$

(b) $$D = -7\underbrace{\begin{vmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix}}_{=-21\cdot 21 \text{ nach Teil a}} \underbrace{-3\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -1 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{nach 1.Zeile entw.}}$$

$$= -21\cdot 21 - 3(-3)\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - 2(-3)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = -441 + 9\cdot 9 + 6(-3) = -378.$$

(c) $$\begin{matrix} -3 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 11 \\ 0 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & 7 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{63}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{105}{4} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{63}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{matrix}$$

Durch die Entwicklungsregel erhalten wir jetzt: $D = (-3)\cdot 4\cdot \frac{3}{4}\cdot 42 = -378.$

Problem 17: Compute the determinant of the matrix A

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & -5 & -5 & -2 \\ 3 & -3 & -11 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -3 & -7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Lösung 17: Mit dem Gauß-Algorithmus und der Entwicklungsregel erhalten wird das Ergebnis:

$$\begin{vmatrix} \boxed{-1} & 2 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & -5 & -5 & -2 \\ 3 & -3 & -11 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -3 & -7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{-1} & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -3 & -4 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -6 & -4 & -5 & 4 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ \boxed{3} & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ \mathbf{3} & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(3)\begin{vmatrix} \boxed{-2} & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & -3 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} \mathbf{-2} & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)(-2)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ \boxed{-1} & 1 \end{vmatrix} = (6)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \mathbf{-1} & 1 \end{vmatrix} = (6)(-1)(-1)(1) = 6$$

Problem 18: Given

$$A = \begin{pmatrix} 5 & i-1 & 7 & -4 \\ 5 & \frac{1}{2}(1-i) & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -i-1 & -2 & -2 \\ 2 & -i-1 & -4 & -4 \\ 3 & -5i-5 & -4 & -4 \\ 4 & -7i-7 & -6 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Determine $\det(A)$ and $\det(B)$, as well as $\det(AB^*)$ and $\det(A^{-1}B)$.

Lösung 18: Wir lösen die Determinanten von A und B mit dem Gauß-Algorithmus und Entwicklung:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 5 & i-1 & 7 & -4 \\ 5 & \frac{1}{2}(1-i) & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & i-1 & 0 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2}(1-i) & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1)\begin{vmatrix} 5 & i-1 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2}(1-i) & 2 \\ 4 & 0 & \boxed{2} \end{vmatrix} \\
&= (-1)\begin{vmatrix} -1 & i-1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}(1-i) & 0 \\ 4 & 0 & \mathbf{2} \end{vmatrix} = (-1)(2)\begin{vmatrix} -1 & i-1 \\ \boxed{1} & \frac{1}{2}(1-i) \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(i-1) \\ \mathbf{1} & \frac{1}{2}(1-i) \end{vmatrix} \\
&= (-2)(-1)\frac{1}{2}(1-i) = (i-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \begin{vmatrix} \boxed{1} & -i-1 & -2 & -2 \\ 2 & -i-1 & -4 & -4 \\ 3 & -5i-5 & -4 & -4 \\ 4 & -7i-7 & -6 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -i-1 & -2 & -2 \\ 0 & i+1 & 0 & 0 \\ 0 & -2i-2 & 2 & 2 \\ 0 & -3i-3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} \boxed{i+1} & 0 & 0 \\ -2i-2 & 2 & 2 \\ -3i-3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (i+1)\begin{vmatrix} \boxed{2} & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (i+1)\begin{vmatrix} \mathbf{2} & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2i-2
\end{aligned}$$

Die restlichen Determinanten können wir mit Satz 1.43 daraus bestimmen:

$$\det(AB^*) = \det(A)\det(B^*) = \det(A)\overline{\det(B)} = (i-1)(2i-2) = -4i$$

$$\det(A^{-1}B) = \det(A^{-1})\det(B) = \frac{\det(B)}{\det(A)} = \frac{-2i-2}{i-1} = \frac{(-2i-2)(-i-1)}{(i-1)(-i-1)} = 2i$$

Problem 19: We consider the question on which conditions a polynomial p of 2nd degree is uniquely defined by $p(a_1) = b_1$, $p(a_2) = b_2$, $p(a_3) = b_3$, i.e. its graph is passing through three points.

(a) Compute the determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}.$$

When does this determinant have the value 0?

(b) Set up the system of linear equations for the coefficients c_1, c_2, c_3 of the polynomial $p(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$, in case this polynomial fulfils the conditions $p(a_j) = b_j$ for $j = 1, 2, 3$.

(c) On which constraints on a_j, b_j, $j = 1, 2, 3$ does the system of linear equations for the coefficients c_j, $j = 1, 2, 3$ have exactly one solution?

Lösung 19:

(a) Die Determinante nennt man Vandermonde-Determinante, durch eine Zeilenoperation mit folgender Entwicklung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \boxed{1} & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1^2 \\ 0 & a_3-a_1 & a_3^2-a_1^2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2^2-a_1^2 \\ a_3-a_1 & a_3^2-a_1^2 \end{vmatrix} \\
&= (a_2-a_1)(a_3^2-a_1^2) - (a_3-a_1)(a_2^2-a_1^2) \\
&= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3+a_1) - (a_3-a_1)(a_2-a_1)(a_2+a_1) \\
&= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3+a_1-a_2-a_1) = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)\,.
\end{aligned}$$

Die Determinante ist 0, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist, also entweder $a_1 = a_2$, oder $a_1 = a_3$, oder $a_2 = a_3$ gilt.

(b) Setzen wir die Bedingungen in das Polynom ein:

$$\begin{aligned}
p(a_1) = c_1 + c_2a_1 + c_3a_1^2 &\overset{!}{=} b_1 \\
p(a_2) = c_1 + c_2a_2 + c_3a_2^2 &\overset{!}{=} b_2 \\
p(a_3) = c_1 + c_2a_3 + c_3a_3^2 &\overset{!}{=} b_3
\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise lautet das LGS damit

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(c) Nach Satz 1.43 (f) und Satz 1.33 hat ein LGS mit quadratischer Matrix genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante der Matrix ungleich 0 ist. Wir haben gesehen, dass das Polynominterpolationsproblem durch drei Punkte genau auf eine Vandermonde-Matrix führt. Die Determinante der Matrix ist genau dann ungleich 0, wenn $a_1 \neq a_2$, $a_2 \neq a_3$ und $a_1 \neq a_3$ ist, also ist das Problem genau dann eindeutig lösbar, wenn die a_j paarweise unterschiedlich sind, die Werte der b_j sind vollkommen irrelevant und können frei gewählt werden.

Bemerkung: Mit Hilfe der Lagrange-Formel kann man solche Interpolationspolynome direkt angeben:

$$p(x) = b_1 \frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} + b_2 \frac{(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + b_3 \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

Sie können sich leicht davon überzeugen, dass dies ein Polynom 2. Grades ist, das die geforderten Bedingungen erfüllt, wenn die a_j paarweise unterschiedlich sind.

Problem 20: Consider the linear mapping $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ represented by the following matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

with respect to the standard basis. Determine the vector b_3 which fulfils the equation $\psi(b_3) = b_3$. Show that $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ is a basis where $b_1 = (1,1,1)^\top$, $b_2 = (0,1,1)^\top$ and arrange the matrix of ψ with respect to the basis B.
Lösung 20: Sei $b_3 = (x_1, x_2, x_3)^\top$ bezüglich der Standardbasis, dann erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrcl} -x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & x_1 \\ -2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & x_2 \\ -2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & x_3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrrcl} -2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Die dritte Zeile können wir gleich weglassen und lösen das LGS:

$$\begin{array}{rrr|r} -2 & \boxed{-1} & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 2 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & -2 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Hier kann man nun $x_3 = 1$ setzen und dies ergibt $b_3 = (1,0,1)^\top$. Die Vektoren b_1, b_2, b_3 sind linear unabhängig, da das LGS $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$ nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ besitzt. Ausserdem ist der Raum $\mathbb{R}^3$ dreidimensional, somit müssen diese drei linear unabhängigen Vektoren ein Erzeugendensystem bilden und sind damit eine Basis.
Für die Abbildungsmatrix von ψ bezüglich $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ bestimmen wir die Bilder der Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \psi(b_1) &= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -b_2 \\ \psi(b_2) &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 \\ \psi(b_3) &= b_3 \text{ nach Konstruktion} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die folgende Abbildungsmatrix von ψ bezüglich der Basis B:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

An Hand dieser Abbildungsmatrix kann man erkennen, dass es sich bei ψ um eine Drehung um -90 Grad in der b_1, b_2-Ebene um die Drehachse b_3 handelt.