Worksheet No. 5
Exercises with Solutions

Problem 21: Let

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & -4 & 7 & -5 \\ -4 & -5 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Calculate all eigenvalues and eigenvectors of C.

Lösung 21: Die gesuchte Determinante $\det(C - \lambda I)$ wird ein Polynom ergeben. Wir versuchen durch geschickte Zeilen- und Spaltenoperationen die Determinante so zu vereinfachen, dass wir die Faktoren des Polynoms direkt entwickeln können.

Zunächst ziehen wir die dritte Spalte von der ersten ab, und addieren dann die erste Zeile zur dritten:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & -5 & 5 \\ \boxed{-1} & 1-\lambda & 2 & -2 \\ -3 & -4 & 7-\lambda & -5 \\ -4 & -5 & 7 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 4 & -5 & 5 \\ -3 & 1-\lambda & 2 & -2 \\ -10+\lambda & -4 & 7-\lambda & -5 \\ -11 & -5 & 7 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 10-\lambda & 4 & -5 & 5 \\ -3 & 1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ -11 & -5 & 7 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

Jetzt können wir Entwickeln und werden die dritte Spalte von der ersten dann und die zweite Zeile von der dritten abziehen.

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 10-\lambda & 4 & 5 \\ -3 & 1-\lambda & -2 \\ -11 & -5 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 5 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ -6+\lambda & -5 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 5 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ -5+\lambda & -6+\lambda & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

Jetzt addieren wir die erste Zeile auf die dritte und dann die dritte Spalte zur zweiten:

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 5 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 9 & 5 \\ -1 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Nach erneutem Entwickeln können wir den Rest der Determinante bestimmen.

$$(2-\lambda)^2\begin{vmatrix} 5-\lambda & 9 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) = (\lambda-2)^4$$

Also müssen wir nun noch das homogene LGS $(C - 2I)x = 0$ lösen, wir erhalten das folgende System:

$$\begin{array}{rrrr} 3 & 4 & -5 & 5 \\ \boxed{-1} & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -4 & 5 & -5 \\ -4 & -5 & 7 & -7 \end{array} \quad\rightarrow\quad \begin{array}{rrrr} 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ -\mathbf{1} & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \quad\rightarrow\quad \begin{array}{rrrr} 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 \\ -\mathbf{1} & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Setzen wir $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ und $x_4 = \mu \in \mathbb{R}$, so erhalten wir die Eigenvektoren $x = \lambda(3,-1,1,0)^\top + \mu(-3,1,0,1)^\top \neq 0$ zum Eigenwert 2.

Problem 22: Given two planes $E: \ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$ and $F: \ x(\lambda,\mu) = (0,1,0)^\top + \lambda(4,1,3)^\top + \mu(4,-7,3)^\top$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Let the linear mapping $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be a reflection in E and the mapping $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ the orthogonal projection on F.

(a) Determine the matrices A of Φ and B of Ψ with respect to the standard basis. Check if A or B are orthogonal matrices and compute the matrix products A^2 as well as B^2.

(b) Compute the eigenvalues and eigenvectors of Φ and Ψ.

Lösung 22: Für beide Aufgabenteile benötigen wir die Normalenform von F:

$$F: \ 3x_1 - 4x_3 = 0$$

(a) Der Normalenvektor auf E lautet $n = (2, -1, -2)^\top$, damit ist die Spiegelung an E gegeben durch das dyadische Produkt

$$A = I - 2\frac{nn^\top}{n^\top n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir rechnen aus, dass $AA^\top = I$, als ist A orthogonal, und wir erhalten $A^2 = I$, sie ist also auch selbstinvers, nicht verwunderlich für eine Spiegelung.

Der Normalenvektor auf F lautet $m = (3, 0, -4)^\top$, die Orthogonalprojektion auf F erhalten wir damit aus dem dyadischen Produkt

$$B = I - \frac{nn^\top}{n^\top n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 12 \\ 0 & 25 & 0 \\ 12 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Da $BB^\top = B \neq I$ ist B nicht orthogonal, und $B^2 = B$ ist eine typische Eigenschaft von Projektionen.

Es ist auch möglich die Matrizen A und B etwas aufwendiger über die Bilder der Basisvektoren zu bestimmen: Dazu berechnet man geometrisch die Bilder der drei Basisvektoren und schreibt die Ergebnisse dann in die Spalten der Matrix.

(b) Da Φ eine Spiegelung an der Ebene E darstellt, ist $\Phi(n) = -n$ und $\Phi(x) = x$ für alle $x \perp n$, also für alle x aus E, einem zweidimensionalen Unterraum. Damit hat Φ die Eigenwerte -1 und 1 und die Eigenvektoren zum Eigenwert von -1 sind im $\operatorname{span}\{n\}$ und die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind in $E = \operatorname{span}\{(1, 2, 0)^\top, (0, 2, -1)^\top\}$.

Für die Abbildung Ψ gilt $\Psi(m) = 0$ und $\Psi(x) = x$ für alle $x \perp m$, also allen $x \in F$. Damit hat Ψ die Eigenwerte 0 und 1 mit Eigenvektoren aus $\operatorname{span}\{m\}$ und $F = \operatorname{span}\{(4, 1, 3)^\top, (4, -7, 3)^\top\}$.

Problem 23: The linear mappings $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ and $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ are represented by the following matrices with respect to the standard basis:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Compute the eigenvalues and eigenvectors of A and B.

(b) Check if Φ and Ψ describe a projection, reflection or rotation. If so, find the projection plane, reflection plane or rotation axis and angle of rotation.

Lösung 23:

(a) Das charakteristische Polynom von A lautet:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

Die Matrix A hat damit die Eigenwerte 0 und 1. Für die Eigenvektoren zum Eigenwert 0 lösen wir das System $3Ax = 0$ (die Multiplikation mit 3 verändert das Ergebnis nicht):

$$\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 0 & -3 & -3 \\ 0 & \boxed{3} & 3 \\ \mathbf{1} & 1 & 2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 3 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \end{array}$$

Mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ erhalten wir die Eigenvektoren $x = \lambda(-1, -1, 1)^\top$ zum Eigenwert 0. Zum Eigenwert 1 lösen wir das System $(A - I)x = 0$, oder besser $3(A - I)x = 0$:

$$\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & -1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & -1 \end{array}$$

Mit $x_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ und $x_3 = \mu \in \mathbb{R}$ erhalten wir die Eigenvektoren $x = \lambda(-1, 1, 0) + \mu(1, 0, 1) \neq 0$ zum Eigenwert 1.

Das charakteristische Polynom von B lautet

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 1) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

und nach Polynomdivison erhalten wir die Nullstellen und damit Eigenwerte 1 und -1. Für die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 bestimmen wir die Lösung von $9(A-I)x=0$:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{-2} & 4 & -4 \\ 4 & -8 & 8 \\ -4 & 8 & -8 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{-2} & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind $x=\lambda(2,1,0)^\top+\mu(-2,0,1)^\top \neq 0,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Zum Eigenwert -1 lösen wir $9(A+I)x=0$:

$$\begin{array}{ccc} 16 & 4 & -4 \\ \boxed{4} & 10 & 8 \\ -4 & 8 & 10 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 0 & -36 & -36 \\ \mathbf{4} & 10 & 8 \\ 0 & \boxed{18} & 18 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{4} & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{18} & 18 \end{array}$$

Zum Eigenwert -1 erhalten wir die Eigenvektoren $x=\lambda(1,-2,2)^\top$ für $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(b) Stellen wir die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich einer Basis von Eigenvektoren $\{(-1,-1,1)^\top,(-1,1,0)^\top,(1,0,1)^\top\}$ dar, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist Φ eine orthogonale Projektion in Richtung $(-1,-1,1)^\top$ auf die Ebene $-x_1-x_2+x_3=0$, bzw. $\operatorname{span}\{(-1,1,0)^\top,(1,0,1)^\top\}$.

Bestimmen wir die Abbildungsmatrix von Ψ bezüglich einer Basis von Eigenvektoren $\{(2,1,0)^\top,(-2,0,1)^\top,(1,-2,2)^\top\}$, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und damit eine Spiegelung an der Ebene $x_1-2x_2+2x_3=0$, bzw. $\operatorname{span}\{(2,1,0)^\top,(-2,0,1)^\top\}$.

Problem 24:

(a) Determine the eigenvalues of $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Let $p(x)=c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0$ be the characteristic polynomial of A. Show that $p(A)=0$, i.e. $c_3A^3+c_2A^2+c_1A+c_0I_3=0$. (This is true in general for every square matrix and its characteristic polynomial!)

(c) From $p(A)=0$, determine the inverse matrix A^{-1}.

Lösung 24: (a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & -6-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -6-\lambda & 0 \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(-6-\lambda)(2-\lambda)-4(-6-\lambda) = -(\lambda+6)(\lambda-1)(\lambda-6) = -\lambda^3+\lambda^2+36\lambda-36. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind -6, 1, 6.
(b) Aus (a) wissen wir, dass $p(\lambda)=-\lambda^3+\lambda^2+36\lambda-36$, also wollen wir zeigen

$$p(A)=-A^3+A^2+36A-36I_3 \overset{!}{=} 0.$$

Nachrechen liefert $A^2=\begin{pmatrix} 29 & 0 & 28 \\ 0 & 36 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ und $A^3=\begin{pmatrix} 173 & 0 & 172 \\ 0 & 216 & 0 \\ 43 & 0 & 44 \end{pmatrix}$. Also

$$p(A)=\begin{pmatrix} -173 & 0 & -172 \\ 0 & 216 & 0 \\ -43 & 0 & -44 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 29 & 0 & 28 \\ 0 & 36 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 180 & 0 & 144 \\ 0 & -216 & 0 \\ 36 & 0 & 72 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir formen die Gleichung $-A^3+A^2+36A-36I_3=0$ um:

$$\frac{1}{36}\left(-A^2+A+36\right)A=I_3.$$

Daraus können wir schließen, dass $A^{-1} = \frac{1}{36}\left(-A^2 + A + 36\right)$. Also

$$A^{-1} = \frac{1}{36}\left[\begin{pmatrix} -29 & 0 & -28 \\ 0 & -36 & 0 \\ -7 & 0 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Problem 25: *In physical chemistry the molecular orbitals and the corresponding energies of π-electron systems can be computed quantum mechanically via the Hückel method. The molecular structure is represented in a kind of normed adjacency matrix, where every carbon compound is represented by a 1. The eigenvalues of this matrix characterise the energies, and the eigenvectors describe the structure of the molecular orbitals.*
Compute the eigenvalues and eigenvectors of the matrix M for the illustrated cyclopropenyl compound:

$$\begin{array}{c} \mathrm{C} \\ / \quad \backslash \\ \mathrm{C} — \mathrm{C} \end{array} \qquad \rightarrow \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 25: Zunächst bestimmen wir das charakteristische Polynom von M:

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 - 2\lambda - 1) = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

Wir erhalten die Nullstellen und damit als Eigenwerte 2 und -1. Die Eigenvektoren zum Eigenwert 2 bestimmen wir aus dem homogenen Gleichungssystem $(M - 2I)x = 0$:

$$\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 0 & -3 & 3 \\ \mathbf{1} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & -3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{3} & -3 \end{array}$$

Die Eigenvektoren sind $x = \lambda(1, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Zum Eigenwert -1 bestimmen wir die Eigenvektoren aus dem Gleichungssystem $(M + I)x = 0$:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Wir erhalten die Eigenvektoren $x = \lambda(1, -1, 0)^\top + \mu(1, 0, -1)^\top \neq 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.