Worksheet No. 6
Exercises with Solutions

Problem 26: Let the following differential equation for $x > 0$ be given:

$$y'''(x) - \frac{2}{x}y''(x) + \frac{5}{x^2}y'(x) - \frac{5}{x^3}y(x) = 0$$

Check, if the following functions are solutions of this differential equation:
(a) $y_1(x) = \sin(x^2)$,

(b) $y_2(x) = x$,

(c) $y_3(x) = \exp(\frac{2}{x})$,

(d) $y_4(x) = x^2\cos(\ln(x))$.

Lösung 26:

(a) Die Ableitungen von y_1 lauten:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 2x\cos(x^2) \\ y_1''(x) &= -4x^2\sin(x^2) + 2\cos(x^2) \\ y_1'''(x) &= -12x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2) \end{aligned}$$

Auf der linken Seite der Differentialgleichung erhalten wir damit:

$$-12x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2) + 8x\sin(x^2) - \frac{4}{x}\cos(x^2) + \frac{10}{x^2}\cos(x^2) - \frac{5}{x^3}\sin(x^2) \not\equiv 0$$

Dies ist also sicher keine Lösung der DGL.

(b) Die erste Ableitung von y_2 ist $y_2'(x) = 1$ und alle folgenden 0. Somit erhalten wir auf der linken Seite der DGL

$$\frac{5}{x^2} - \frac{5}{x^3}x = 0$$

und so ist y_2 eine Lösung der DGL.

(c) Wir bestimmen die Ableitungen von y_3:

$$\begin{aligned} y_3'(x) &= -\frac{2}{x^2}\exp(\frac{2}{x}) \\ y_3''(x) &= (\frac{4}{x^4} + \frac{4}{x^3})\exp(\frac{2}{x}) \\ y_3'''(x) &= (-\frac{12}{x^4} - \frac{24}{x^5} - \frac{8}{x^6})\exp(\frac{2}{x}) \end{aligned}$$

Und in der linken Seite der DGL ergibt dies:

$$\left(-\frac{12}{x^4} - \frac{24}{x^5} - \frac{8}{x^6} - \frac{8}{x^5} - \frac{8}{x^4} - \frac{10}{x^4} - \frac{5}{x^3}\right)\exp(\frac{2}{x}) \not\equiv 0$$

Auch dies kann keine Lösung sein.

(d) Die Ableitungen von y_4:

$$\begin{aligned} y_4'(x) &= 2x\cos(\ln(x)) - x\sin(\ln(x)) \\ y_4''(x) &= \cos(\ln(x)) - 3\sin(\ln(x)) \\ y_4'''(x) &= -\frac{1}{x}\sin(\ln(x)) - \frac{3}{x}\cos(\ln(x)) \end{aligned}$$

In der Differentialgleichung erhalten wir damit:

$$\frac{1}{x}\big(-\sin(\ln(x)) - 3\cos(\ln(x)) - 2\cos(\ln(x)) + 6\sin(\ln(x)) + 10\cos(\ln(x)) - 5\sin(\ln(x)) - 5\cos(\ln(x))\big) = 0$$

Damit haben wir mit y_4 eine weitere Lösung dieser Differentialgleichung. Eine weitere zu den vorherigen unabhängige Lösung ist $y_5(x) = x^2\sin(\ln(x))$.

Problem 27: Determine the general real-valued solution of the homogeneous differential equation

$$y'''(x) + 2y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

using the exponential ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
Lösung 27: Die charakteristische Gleichung lautet: $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. Wir erhalten $\lambda_1 = -1$ durch raten, und die restlichen Nullstellen nach Polynomdivision: $(\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1) : (\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda + 1$. Also gilt $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1-4}) = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ also $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ und $\lambda_3 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$.
Die allgemeine komplexe Lösung lautet somit

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{(-1+i\sqrt{3})x/2} + c_3 e^{(-1-i\sqrt{3})x/2}\,.$$

Nutzen wir jetzt die Eulersche Formel $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ können wir durch geschicktes lineares Kombinieren von $y_2(x) = e^{-x/2}(\cos(\sqrt{3}x/2) + i\sin(\sqrt{3}x/2))$ und $y_3(x) = e^{-x/2}(\cos(\sqrt{3}x/2) - i\sin(\sqrt{3}x/2))$ reelle Funktionen bestimmen: $\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{2}(y_2(x) + y_3(x)) = e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2)$ und $\tilde{y}_3(x) = \frac{1}{2i}(y_2(x) - y_3(x)) = e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$. Somit lautet die reelle allgemeine Lösung:

$$y(x) = a_1 e^{-x} + a_2 e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) + a_3 e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$$

Problem 28: Solve the initial value problems:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0\,,\ x \in \mathbb{R}\,, & y(0) = 0,\ y'(0) = -4; \\ \text{(b)} & y'''(x) - 4y'(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}\,, & y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 2. \end{array}$$

Lösung 28:

(a) $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

$$\left.\begin{array}{r} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 + 3C_2 = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow y = e^{-x} - e^{3x}$$

(b) $\lambda^3 - 4\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow y_h = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$

$$\left.\begin{array}{r} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ 2C_2 - 2C_3 = 0 \\ 4C_2 + 4C_3 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}e^{2x} + \tfrac{1}{4}e^{-2x}$$

Problem 29: Determine the real-valued general solution of the differential equation

$$x^4 u''''(x) + 6x^3 u'''(x) - 2xu'(x) + 20u(x) = 0, \quad x > 0.$$

Lösung 29: Der Potenzansatz $u(x) = x^\lambda$ liefert uns die Gleichung

$$((\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 1)\lambda + 6(\lambda - 2)(\lambda - 1)\lambda - 2\lambda + 20)\, x^\lambda = (\lambda^4 - 7\lambda^2 + 4\lambda + 20)x^\lambda \stackrel{!}{=} 0\,,$$

die unabhängig von x erfüllt ist, wenn $\lambda^4 - 7\lambda^2 + 4\lambda + 20 = 0$. Durch Raten der Nullstellen $\lambda_{1,2} = -2$, Polynomdivision und quadratischer Ergänzung erhalten wir

$$\lambda^4 - 7\lambda^2 + 4\lambda + 20 = (\lambda + 2)(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda + 10) = (\lambda + 2)^2(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = (\lambda + 2)^2\left((\lambda - 2)^2 + 1\right)$$

Wir haben damit die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -2$, $\lambda_{3,4} = 2 \pm i$. Aus der reellen Nullstelle erhalten wir $u_1(x) = x^{-2}$, und da die Nullstelle doppelt ist, mit Rettungsfaktor $u_2(x) = \ln(x)x^{-2}$. Die komplexen Nullstellen ergeben $u_3(x) = x^2\sin(\ln x)$ und $u_4(x) = x^2\cos(\ln x)$. Damit lautet die allgemeine reelle Lösung:

$$u(x) = C_1 x^{-2} + C_2\ln(x)x^{-2} + C_3 x^2\sin(\ln x) + C_4 x^2\cos(\ln x)$$

für $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Problem 30: Show that $u(x) = e^{x^2}$ solves the homogeneous differential equation

$$u''(x) - 2xu'(x) - 2u(x) = 0, \quad x \in (0, \infty)\,.$$

Determine a second non-trivial solution by means of the method of reduction of the order.
Lösung 30: $u(x) = e^{x^2}$, also $u'(x) = 2xe^{x^2}$ und $u''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$. Einsetzen in die Gleichung liefert

$$2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - 4x^2e^{x^2} - 2e^{x^2} = 0,$$

also ist u Lösung der DGL.
Der Reduktionsansatz $u_2(x) = v(x)e^{x^2}$ liefert $u_2'(x) = v'(x)e^{x^2} + v(x)2xe^{x^2}$ und $u_2''(x) = v''(x)e^{x^2} + 4xv'(x)e^{x^2} + v(x)\left[2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}\right]$. Setzt man dies in die ursprüngliche DGL ein, so erhält man

$$v''(x)e^{x^2} + v'(x)2xe^{x^2} = 0.$$

Wir setzen $w = v'$ und haben $w'(x)e^{x^2} + 2xw(x)e^{x^2} = 0$ bzw. $w'(x) + 2xw(x) = 0$. Wir haben somit die Ordnung um Eins reduziert. Dies ist eine DGL in getrennten Veränderlichen, die wir folgendermaßen lösen:

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = -2x, \quad \text{also} \quad \int \frac{w'(x)}{w(x)}\, dx = -\int 2x,$$

oder $\ln|w| = -x^2$ (Integrationskonstante willkürlich zu 0 gesetzt), also $w = e^{-x^2}$. Da w ja die Ableitung von v war, bekommen wir v durch Integration von w, also $v = \int w(x)dx = \int e^{-x^2}dx$. Dieses letzte Integral ist nicht elementar lösbar. Wir haben also die zweite Lösung

$$u_2(x) = u(x) \cdot v(x) = e^{x^2} \int e^{-x^2} dx.$$