# Worsheet No. 7
# Exercises with Solutions

**Problem 31:** Determine the general real-valued solution of the differential equation

$$0 \quad = \quad x^4y^{(4)}(x) + 2x^3y'''(x) + 3x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x)\,, \qquad x > 0\,.$$

Hint: The characteristic polynomial is divisible by $q(\lambda) := \lambda^2 - 2\lambda + 2$.
**Lösung 31:** Mit dem Ansatz $y(x) = x^\lambda$ für eine Eulersche Differentialgleichung erhalten wir mit Hilfe der Ableitungen

$$\begin{aligned} y(x) &= x^\lambda \\ y'(x) &= \lambda x^{\lambda-1} \\ y''(x) &= (\lambda^2 - \lambda)x^{\lambda-2} \\ y'''(x) &= (\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda)x^{\lambda-3} \\ y^{(4)}(x) &= (\lambda^4 - 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - 6\lambda)x^{\lambda-4} \end{aligned}$$

in der Differentialgleichung das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4\,.$$

Den Hinweis nutzen wir mit einer Polynomdivision und erhalten

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = (\lambda - 1 + i)^2(\lambda - 1 - i)^2\,,$$

und damit hat $p$ zwei jeweils doppelte Nullstellen $\lambda_1 = 1 + i$ und $\lambda_2 = 1 - i$. Die allgemeine komplexe Lösung ist

$$y(x) = c_1x^{1+i} + c_2x^{1-i} + c_3x^{1+i}\ln x + c_4x^{1-i}\ln x\,,\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}\,.$$

Zur Bestimmung einer reellen Lösung nutzen wir die Eulersche Formel:

$$\begin{aligned} x^{1+i} &= e^{(1+i)\ln x} = e^{\ln x}e^{i\ln x} = x(\cos\ln x + i\sin\ln x) \\ x^{1-i} &= e^{(1-i)\ln x} = e^{\ln x}e^{-i\ln x} = x(\cos\ln x - i\sin\ln x) \end{aligned}$$

Mit der Summe und Differenz der beiden Terme erhalten wir zwei reelle Lösungen $x\cos\ln x$ und $x\sin\ln x$, und insgesamt die allgemeine reelle Lösung:

$$y(x) = d_1x\sin(\ln x) + d_2x\cos(\ln x) + d_3x\ln x\sin(\ln x) + d_4x\ln x\cos(\ln x)\,,\ d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}\,.$$

**Problem 32:** Solve the initial value problem

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \quad (2x^2 + x)y''(x) - (4x^2 - 2)y'(x) - (4x + 4)y(x)\,, \qquad x \geq 1\,, \\ &\quad\ \ y(1) = 3\,,\ y'(1) = 0\,. \end{aligned}$$

Hint: The function $y_1(x) = \frac{1}{x}$ satisfies this differential equation.
**Lösung 32:** Mit der gegebenen Lösung kann eine Reduktion der Ordnung durchgeführt werden: Der Ansatz

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)u(x) = \frac{1}{x}u(x) \\ y_2'(x) &= -\frac{1}{x^2}u(x) + \frac{1}{x}u'(x) \\ y_2''(x) &= \frac{2}{x^3}u(x) - \frac{2}{x^2}u'(x) + \frac{1}{x}u''(x) \end{aligned}$$

führt auf die Differentialgleichung erster Ordnung für $u'$:

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & (2x^2 + x)\left(\frac{2}{x^3}u(x) - \frac{2}{x^2}u'(x) + \frac{1}{x}u''(x)\right) \\ & -(4x^2 - 2)\left(-\frac{1}{x^2}u(x) + \frac{1}{x}u'(x)\right) \\ & -(4x + 4)\frac{1}{x}u(x) \\ = \quad & (2x + 1)u''(x) - (4x + 4)u'(x) \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung ist durch die Trennung der Veränderlichen und Partialbruchzerlegung lösbar:

$$\begin{aligned}\int \frac{u''(x)}{u'(x)}\,dx = \ln|u'(x)| &= \int \frac{4x+4}{2x+1}\,dx = \int\left(2+\frac{2}{2x+1}\right)\,dx \\ &= 2x+\ln|2x+1|+C\end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung der Integrationskonstanten (es interessiert zunächst nur eine weitere Lösung) erhalten wir

$$u'(x) = (2x+1)\,e^{2x}\,,$$

und mit partieller Integration

$$u(x) = \int (2x+1)e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}(2x+1)e^{2x} - \int e^{2x}\,dx = xe^{2x}+C\,.$$

Für $C=0$ erhalten wir damit die zweite Lösung $y_2(x) = xe^{2x}y_1(x) = e^{2x}$. Die allgemeine Lösung und deren Ableitung ist damit

$$y(x) = C_1\frac{1}{x} + C_2\exp(2x)\,,\ y'(x) = -C_1\frac{1}{x^2}+2C_2e^{2x}$$

und mit den Anfangswerten die Bedingungen $y(1) = C_1 + e^2C_2 \overset{!}{=} 3$ und $y'(1) = -C_1 + 2e^2C_2 \overset{!}{=} 0$. Das lineare Gleichungssystem hat die Lösung $C_1 = 2$ und $C_2 = e^{-2}$, somit erhalten wir die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = \frac{2}{x} + \exp(2x-2)$$

**Problem 33:** Solve the initial value problem of the following linear system

$$\begin{aligned} u'(x) &= v(x)\,, & u(0) &= 2\,,\\ v'(x) &= w(x)\,, & v(0) &= 2\,,\\ w'(x) &= 4u(x)-4v(x)+w(x)\,, & w(0) &= -3\,.\end{aligned}$$

**Lösung 33:** 1. Bestimmung der Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 4 & -4 & 1-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3+\lambda^2-4\lambda+4 = (1-\lambda)(\lambda^2+4) \overset{!}{=} 0$$

Damit haben wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = \pm 2i$.
2. Berechnen der Eigenvektoren: Für $\lambda_1 = 1$ lautet das zu lösende LGS $A-\lambda I = 0$:

$$\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 4 & -4 & 0 & 0\end{array}$$

Auflösen liefert: $x_3$ beliebig, also z.B. $x_3 = 1$, und damit $x_3 = x_2 = x_1 = 1$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ lautet somit $v_1 = (1,1,1)^\top$.
Für $\lambda_2 = 2i$ ist das folgende LGS zu lösen:

$$\begin{array}{rrr|r} -2i & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2i & 1 & 0\\ 4 & -4 & 1-2i & 0\end{array}$$

Auflösen liefert $x_3 \overset{zB}{=} 1$, und damit $x_2 = 1/(2i)$,$x_1 = 1/(2i)^2$, bzw. $v_2 = (-1/4, 1/(2i), 1)^\top$ ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2i$.
Mit $\lambda_3 = -2i$ erhalten wir $v_3 = \overline{v_2} = (-1/4, -1/(2i), 1)^\top$
3. Allgemeine Lösung bestimmen: Als komplexe Lösung erhalten wir

$$u(x) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^x + c_2\begin{pmatrix}-1/4\\1/(2i)\\1\end{pmatrix}e^{2ix} + c_3\begin{pmatrix}-1/4\\-1/(2i)\\1\end{pmatrix}e^{-2ix},\ x\in\mathbb{R},\ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{C}.$$

Die allgemeine reelle Lösung lautet dann

$$u(x) = C_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^x + C_2\begin{pmatrix}-\cos(2x)/2\\ \sin(2x)\\ 2\cos(2x)\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}\sin(2x)/2\\ \cos(2x)\\ -2\sin(2x)\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R},\ C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}.$$

4. Anfangswerte erfüllen: Eingesetzt erhalten wir das LGS

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dessen Lösung $C_1 = 1$, $C_2 = -2$ und $C_3 = 1$ lautet. Als Endergebnis erhalten wir damit

$$u(x) = \begin{pmatrix} e^x + \cos(2x) + \sin(2x)/2 \\ e^x - 2\sin(2x) + \cos(2x) \\ e^x - 4\cos(2x) - 2\sin(2x) \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R}.$$

**Problem 34:** Find the solution of the initial value problem for the complex-valued liner system

$$u'(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{7}i & \frac{6}{7} \\ -\frac{65}{42} + i & -1 + \frac{5}{7}i \end{pmatrix} u(x), \quad x \in [0, \infty), \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Lösung 34:** Zunächst werden die Eigenwerte mit Hilfe des charakteristischen Polynoms bestimmt:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{7}i - \lambda & \frac{6}{7} \\ -\frac{65}{42} + i & -1 + \frac{5}{7}i - \lambda \end{pmatrix} = \ldots = \lambda^2 - \frac{4}{7}ix + \frac{3}{7}.$$

Die Nullstellen sind $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -\frac{3}{7}i$.
Für die Eigenvektoren bestimmen wir eine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems $(A - \lambda I)v = 0$. Da bei den zwei Zeilen genau eine wegfallen muss, denn wir kennen schon die Eigenwerte, erhalten wir die Eigenwerte hier schnell aus der ersten Zeile: Für $\lambda_1 = i$ ist die erste Zeile $(7 - i - 7i)x_1 + 6x_2 = 0$, hier wählen wir $x_1 = 6$ und erhalten $x_2 = -7 + 8i$, bzw. den Eigenvektor $v_1 = (6, -7 + 8i)^\top$. Für $\lambda_2 = -\frac{3}{7}i$ lösen wir $(7 - i + 3i)x_1 + 6x_2 = 0$: mit $x_1 = 6$ ist $x_2 = -7 - 2i$ und somit $v_2 = (6, -7 - 2i)^\top$.
Die allgemeine Lösung lautet

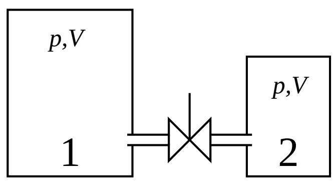
$$u(x) = c_1 \begin{pmatrix} 6 \\ -7 + 8i \end{pmatrix} e^{ix} + c_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -7 - 2i \end{pmatrix} e^{-\frac{3}{7}ix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Im letzten Schritt passen wir die allgemeine Lösung an die Anfangswerte an, $u(0) = (1, 2)^\top$ führt zu $6c_1 + 6c_2 = 1$, und $(-7 + 8i)c_1 + (-7 - 2i)c_2 = 2$. Die Lösung lautet $c_1 = \frac{1}{30} - \frac{19}{60}i$ und $c_2 = \frac{2}{15} + \frac{19}{60}i$. Damit ist

$$u(x) = \left(\frac{1}{30} - \frac{19}{60}i\right) \begin{pmatrix} 6 \\ -7 + 8i \end{pmatrix} e^{ix} + \left(\frac{2}{15} + \frac{19}{60}i\right) \begin{pmatrix} 6 \\ -7 - 2i \end{pmatrix} e^{-\frac{3}{7}ix}, \ x \in [0, \infty).$$

**Problem 35:** *Two pressure tanks with different capacities $V_1$ and $V_2$ are linked by a pipe which is closed by a valve. Before opening the stop valve at time $t = 0$ the air in the tanks have two different pressures $p_1(0)$ and $p_2(0)$. By the ideal gas law $pV = nRT$ (n amount of substance, R gas constant, T temperature) assuming isothermal balancing we achieve the relation $\dot{p}V = \dot{n}RT$ and finally with flow resistance $W$ of the pipe, $\dot{n} = Wp$ and the notation $a_{1,2} := \frac{RT}{WV_{1,2}}$ the following system for the model*

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 \\ a_2 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}.$$




Let $p_1(0) = 1$ bar, $p_2(0) = 9$ bar, $a_1 = 1$ bar/s and $a_2 = 3$ bar/s.

(a) In which tank and when is the pressure two bar?

(b) Which pressure will be obtained when the system is completely balanced?

**Lösung 35:** Das zu lösende Anfangswertproblem lautet (einheitenlos)

$$\dot{p}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}}_{=A} p(t), \ t > 0, \quad p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Zunächst wird das charakteristische Polynom bestimmt:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 3 & -3 - \lambda \end{pmatrix} = (-1 - \lambda)(-3 - \lambda) - 3 = \lambda(\lambda + 4)$$

Die Eigenwerte sind damit $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -4$. Einen Eigenvektor des ersten Eigenwerts erhalten wir aus dem Gleichungssystem $Ax = 0$, z.B. $x^{(1)} = (1,1)^\top$, zum zweiten Eigenwert betrachten wir das Gleichungssystem $(A+4I)x = 0$, dies führt zu $x^{(2)} = (-1,3)^\top$. Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystem ist somit

$$p(t) = C_1 x^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 x^{(2)} e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-4t}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Aus den angegebenen Anfangswerte $p(0) = (1,9)^\top$ erhalten wir $C_1 = 3$ und $C_2 = 2$ und die Lösung des Modells

$$p(t) = \begin{pmatrix} 3 - 2e^{-4t} \\ 3 + 6e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

(a) Für den Druck im ersten Behälter hat die Gleichung $p_1(t) = 3 - 2e^{-4t} \stackrel{!}{=} 2$ die Lösung $t = \frac{1}{4}\ln 2 \approx 0.17$ s, für den zweiten Behälter gilt $p_2(t) = 3 + 6e^{-4t} > 3$ und wird nie den geforderten Druck erreichen.

(b) Den Druckausgleich erhalten wir für $t \to \infty$, dann gilt

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{t\to\infty} 3 - 2e^{-4t} \\ \lim\limits_{t\to\infty} 3 + 6e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Somit beträgt der Druck in beiden Behältern 3 bar.