# Worsheet No. 8
# Exercises with Solutions

**Problem 36:** Specify the roots of the characteristic polynomial and an ansatz for a particular solution by special right-hand sides of the following differential equations for $y = y(x)$:

(a) $y'' + y = x\sin x$ (b) $y''' - 4y'' - 2y' + 20y = x^2e^x$
(c) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = xe^{-2x}$ (d) $y''' + y'' - 6y' = xe^{2x} + 2e^{-3x}$
(e) $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + 5y = -8\cos x - 8\sin x$ (f) $y^{(5)} + y^{(4)} - 4y''' - 16y'' - 20y' - 12y = e^{-3x}$

Hint: A solution of (e) is $y(x) = x\cos(x)$ and one solution of the homogeneous differential equation in (f) is $y(x) = x\sin(x)e^{-x}$.

**Lösung 36:**

(a) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ und hat die Nullstellen $+i, -i$, also liegt bei der gegebenen rechten Seite eine Resonanz vor. Deshalb lautet der Ansatz hier

$$y_p(x) = x(a_1x + a_0)\sin(x) + x(b_1x + b_0)\cos(x)\,.$$

(b) Das char. Polynom lautet hier $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 20$ wir sehen die Nullstelle zwei und erhalten nach Polynomdivision $p(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 10)$ und damit die Nullstellen $-2, 3 \pm i$. Es liegt also keine Resonanz vor und der Ansatz lautet:

$$y_p(x) = (a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x\,.$$

(c) Wir haben $p(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = (\lambda + 2)^3$. Wir haben hier eine Resonanz durch die Nullstelle $-2$ mit Vielfachheit 3. Also lautet der Ansatz

$$y_p(x) = x^3(a_1x + a_0)e^{-2x}\,.$$

(d) Hier ist $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 2)$ mit den Nullstellen $0, -3, 2$. In beiden Summanden liegt eine Resonanz vor deshalb benutzen wir hier

$$y_p(x) = x(a_1x + a_0)e^{2x} + x(b_0)e^{-3x}\,.$$

(e) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 5$ und durch den Hinweis sehen wir, dass womöglich $\pm i$ Nullstellen sind (Eulersche Formel), wir also $x^2 + 1$ herausdividieren können: Tatsächlich erhalten wir $p(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 5)$ und damit die Nullstellen $\pm i, -2 \pm i$. Wegen den Nullstellen $\pm i$ haben wir eine Resonanz und damit lautet der Ansatz

$$y_p(x) = x(a_0\sin(x)) + x(b_0\cos(x))\,.$$

(f) An dieser homogenen Lösung erkennen wir, dass wahrscheinlich $-1 \pm i$ sogar doppelte Nullstellen sind, also $(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2$ aus dem charakteristischen Polynom $p(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 - 4\lambda^3 - 15\lambda^2 - 20\lambda - 12$ herausdividiert werden kann: Tatsächlich erhalten wir

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2(\lambda - 3)$$

und damit die Nullstellen $-1 \pm i, 3$. Es liegt hier also keine Resonanz vor und der Ansatz ist:

$$y_p(x) = a_0e^{-3x}$$

**Problem 37:** Determine the general solution of the inhomogeneous differential equation

$$y'''(x) + 3y''(x) + 3y'(x) + y(x) = x + 6e^{-x}\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

Use the method of undetermined coefficients to determine a particular solution.

**Lösung 37:** Allgemeine Lösung der homogenen DGL: char Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$. Fundamentalsystem: $\{e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}\}$.
Bestimmung einer partikulären Lösung: Die rechte Seite ist die Summe zweier Standardtypen. Wegen der Resonanz macht man den Ansatz $y(x) = A + Bx + Cx^3e^{-x}$. Die Ableitungen sind
$y'(x) = B + C(3x^2 - x^3)e^{-x},\ y''(x) = C(6x - 6x^2 + x^3)e^{-x},\ y'''(x) = C(6 - 18x + 9x^2 - x^3)e^{-x}$.
Einsetzen liefert nach Vereinfachen $e^{-x}6C + A + 3B + Bx \overset{!}{=} x + 6e^{-x}$, also $A = -3, B = 1, C = 1$.
Die allgemeine Lösung der DGL ist folglich $y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x} - 3 + x + x^3e^{-x}$.

**Problem 38:** Consider the ordinary differential equation

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^3\ln x, \quad x > 0.$$

The associated homogeneous differential equation has a solution of the form $y(x) = Ax + B$.

(a) Determine the general solution of the homogeneous problem using the method of reduction of the order.

(b) Determine a particular solution of the inhomogeneous problem by means of variation of parameters.

(c) Solve the initial value problem for the inhomogeneous ordinary differential equation with $y(1) = y'(1) = 1$.

**Lösung 38:**

(a) Eine homogene Euler-Differentialgleichung löst man normalerweise mit dem Ansatz $y(x) = x^\lambda$. Ist jedoch schon eine Lösung gegeben, so kann man die zweite Lösung durch die Reduktion bestimmen. Aus dem Ansatz der Aufgabenstellung erhält man $y_1(x) = x$ als homogene Lösung; Wir wählen den Reduktionsansatz: $y(x) = xu(x)$, damit $y'(x) = u(x) + xu'(x)$ und $y''(x) = 2u'(x) + xu''(x)$. In der DGL eingesetzt haben wir die reduzierte Differentialgleichung:

$$u''(x) = 0$$

Somit ist $u(x) = cx + d,\ c, d$ beliebig. Deswegen lautet $y(x) = xu(x) = cx^2 + dx$, also ist $y_2(x) = x^2$ weitere homogene Lösung.

An der Wronskideterminante

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 \neq 0$$

sehen wir, dass wir hier tatsächlich ein Fundamentalsystem haben.

(b) Wir verwenden das Prinzip der Variation der Konstanten mit dem Ansatz

$$y_p(x) = c_1(x)x + c_2(x)x^2\,.$$

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1'(x)x + c_2'(x)x^2 &= 0 \\ c_1'(x) + c_2'(x)2x &= x\ln x \end{aligned}$$

mit der Lösung $c_1'(x) = -x\ln x$ und $c_2'(x) = \ln x$. Wir erhalten durch Integration z.B. $c_1(x) == \frac{x^2}{4}(1 - 2\ln x)$ und $c_2(x) = x\ln x - x$. Damit ist $y_p(x) = \frac{x^3}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^3$ eine partikuläre Lösung.

(c) Setzen wir die Anfangsbedingung in die allgemeine Lösung $y(x) = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{x^3}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^3$ ein, so erhalten wir die eindeutige Lösung $y(x) = \frac{x^3}{4}(2\ln x - 3) + \frac{3}{4}x + x^2$.

**Problem 39:** Consider the ordinary differential equation

$$-15u(x) + 3xu'(x) + x^2u''(x) = 8x^{-3}, \qquad x > 0.$$

(a) Find a real-valued fundamental system of the associated homogeneous differential equation.

(b) Find a particular solution by the method of variation of parameters. Determine the general solution of the inhomogeneous problem.

**Lösung 39:**

(a) Der Ansatz ist $u(x) = x^\lambda$. Das charakteristische Polynom dieser Eulerschen Differentialgleichung ergibt sich zu

$$p(\lambda) = -15 + 3\lambda + \lambda(\lambda - 1) = -15 + 2\lambda + \lambda^2 = (\lambda + 1)^2 - 16 = (\lambda - 3)(\lambda + 5)$$

mit den beiden einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -5$. Damit erhalten wir das reelle Fundamentalystem

$$\{x^3, x^{-5}\}.$$

(b) Den Ansatz für die partikuläre Lösung erhalten wir durch Variation der Konstanten aus der homogenen Lösung $u_h(x) = c_1x^3 + c_2x^{-5}$:

$$u_p(x) = c_1(x)x^3 + c_2(x)x^{-5}$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$\begin{aligned} u_p'(x) &= \underbrace{c_1'(x)x^3 + c_2'(x)x^{-5}}_{\stackrel{!}{=}0 \text{ 1. Bedingung}} + 3c_1(x)x^2 - 5c_2(x)x^{-6}, \\ u_p''(x) &= 3c_1'(x)x^2 - 5c_2'(x)x^{-6} + 6c_1(x)x + 30c_2(x)x^{-7}. \end{aligned}$$

Die zweite Bedingung erhalten wir durch Einsetzen der partikulären Lösung in die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
8x^{-3} &\overset{!}{=} -15u_p(x) + 3xu_p'(x) + x^2u_p^{(2)}(x) \\
&= -15c_1(x)x^3 - 15c_2(x)x^{-5} + 9x^3c_1(x) - 15x^{-5}c_2(x) \\
&\quad + 3c_1'(x)x^4 - 5c_2'(x)x^{-4} + 6x^3c_1(x) + 30x^{-5}c_2(x) \\
&= 3c_1'(x)x^4 - 5c_2'(x)x^{-4}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgendes System für $c_1'(x)$ und $c_2'(x)$

$$\begin{aligned}
c_1'(x)x^3 + c_2'(x)x^{-5} &= 0 \\
3c_1'(x)x^4 - 5c_2'(x)x^{-4} &= 8x^{-3}.
\end{aligned}$$

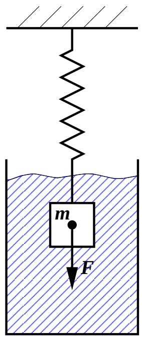
Einsetzen der ersten Bedingung in die Zweite liefert $c_2'(x) = -x$ und damit $c_2(x) = -x^2/2 + E$. Das ergibt $c_1'(x) = x^{-7}$ und damit $c_1(x) = -x^{-6}/6 + F$. Setzten der Konstanten $E$ und $F$ gleich 0 liefert eine partikuläre Lösung

$$u_p(x) = -\frac{1}{6}x^{-6}x^3 - \frac{1}{2}x^2x^{-5} = -\frac{1}{6}(x^{-3} + 3x^{-3}) = -\frac{2}{3}x^{-3}$$

und wir erhalten für die allgemeine Lösung:

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = c_1x^3 + c_2x^{-5} - \frac{2}{3}x^{-3}.$$

**Problem 40:** A mass $m$ of 5 kg streches a spring about 0.1 m. This system is placed in a viscous fluid. Due to the fluid a braking force of 2 N acts on the mass if the velocity is 0.04 m/s. Additionally an exterior force $F(t) = 2\cos(\omega t)$ N, $t > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ acts on the mass. For the acceleration of gravity we can assume $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.




(a) Set up from the balance of forces for spring force $F_F(t) = -Du(t)$, damping $F_D(t) = -\sigma u'(t)$, inertia $F_T(t) = -mu''(t)$ and the exterior force $F(t)$ the appropriate differential equation and find the general solution.

(b) A summand in the solution, one calls it *stationary solution*, renders the behaviour of the system for large time. It is independent from initial conditions.

Write the stationary solution as

$$A(\omega)\cos(\omega t - \delta),$$

and find $\omega$ for which the amplitude $A(\omega)$ is maximal.

**Lösung 40:**

(a) Die Gewichtskraft der Masse ist

$$F_m = 5\,\mathrm{kg} \cdot g = 50\,\mathrm{N}.$$

Bei dieser Kraft wird die Feder um 0.1 m ausgelenkt, sie hat also die Federkonstante

$$D = \frac{50\,\mathrm{N}}{0.1\,\mathrm{m}} = 500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

Für die Dämpfungskonstante $\sigma$ gilt nach der Aufgabenstellung

$$5\,\mathrm{kg} \cdot 0.04\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sigma = 2\mathrm{N}.$$

Hieraus folgt $\sigma = 10\,\mathrm{s}^{-1}$. Die Differentialgleichung für die Auslenkung $u$ erhalten wir aus der Kräftebilanz $\sum F_i = 0$:

$$u''(t) + 10\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,u'(t) + 100\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\,u(t) = \frac{2}{5}\,\cos(\omega t)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, wobei nach Interpretation die rechte Seite auch negativ angesetzt werden kann, die Rechnung ändert sich dadurch bis auf das Vorzeichen nicht. Der Exponentialansatz für die Lösung der homogenen Differentialgleichung führt auf die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 10\lambda + 100 = 0,$$

die die Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -5 \pm i\,5\sqrt{3}$$

besitzt. Da $\omega \in \mathbb{R}$ vorausgesetzt wird, liegt also keine Resonanz vor.

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung verwenden wir den Ansatz vom Typ der rechten Seite. Der Ansatz ist

$$u_{\mathrm{p}}(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t).$$

Nach Ableiten und Einsetzen liefert ein Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(100-\omega^2)\,A + 10\omega\,B &= 2/5,\\ -10\omega\,A + (100-\omega^2)\,B &= 0.\end{aligned}$$

Es besitzt die Lösung

$$\begin{aligned}A &= \frac{2\,(100-\omega^2)}{5\,((100-\omega^2)^2+100\omega^2)}\,\mathrm{m},\\ B &= \frac{4\omega}{(100-\omega^2)^2+100\omega^2}\,\mathrm{m}.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir die allgemeine reelle Lösung

$$\begin{aligned}u(t) = c_1\,\cos(5\sqrt{3}\,t)\,e^{-5t}\,\mathrm{m} &+ c_2\,\sin(5\sqrt{3}\,t)\,e^{-5t}\,\mathrm{m}\\ &+ \frac{2\,(100-\omega^2)}{5\,((100-\omega^2)^2+100\omega^2)}\,\cos(\omega t)\,\mathrm{m}\\ &+ \frac{4\omega}{(100-\omega^2)^2+100\omega^2}\,\sin(\omega t)\,\mathrm{m}.\end{aligned}$$

(b) Die stationäre Lösung $u_s$ besteht genau aus den letzten beiden Summanden der allgemeinen Lösung, da die ersten beiden Summanden für große $t$ gegen null konvergieren. An einem Zeigerdiagramm macht man sich klar, dass die Amplitude dieser beiden Summanden nach Pythagoras genau der Quadratwurzel der Summe der Quadrate der beiden Koeffizienten entspricht. Klammert man aus beiden Termen der stationären Lösung einen Faktor $2/5$ aus, so ergibt die Summe der Quadrate der Zähler wieder

$$(100-\omega^2)^2 + 100\,\omega^2,$$

Daher gibt es eine Zahl $\delta$ mit

$$\begin{aligned}\cos(\delta) &= \frac{100-\omega^2}{\sqrt{(100-\omega^2)^2+100\omega^2}},\\ \sin(\delta) &= \frac{100\,\omega}{\sqrt{(100-\omega^2)^2+100\omega^2}}.\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}u_s(t) &= \frac{2\,[\cos(\delta)\,\cos(\omega t) - \sin(\delta)\,\sin(\omega t)]}{5\sqrt{(100-\omega^2)^2+100\omega^2}}\,\mathrm{m}\\ &= \frac{2}{5\sqrt{(100-\omega^2)^2+100\omega^2}}\,\cos(\omega t-\delta)\,\mathrm{m}.\end{aligned}$$

Mit

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(100-\omega^2)^2+100\omega^2}}$$

folgt

$$A'(\omega) = \frac{100\omega - 2\,\omega^3}{((100-\omega^2)^2+100\omega^2)^{3/2}}.$$

Die nicht-negativen Nullstellen von $A'$ sind $0$ und $5\sqrt{2}$. Da $A(\omega)\to 0$ für $t\to\infty$, erhalten wir die maximale Amplitude für $\omega = 5\sqrt{2}$.