9. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Problem 41: Use the power series method to determine the solution of following initial value problem for the Tshebysheff differential equation with index $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(1-x^2)u''(x) - xu'(x) + n^2u(x) = 0, \quad x \in (-1,1), \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Show that

(a) all coefficients of odd powers vanish,

(b) in case of even n the series truncates after the summand including x^n and

(c) in case of odd n the solution's radius of convergence is 1.

Lösung 41: Wie immer setzen wir an:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \; u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1}, \; u''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) x^{k-2}.$$

Dies setzen wir in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned}
(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty} c_k (k)(k-1)x^{k-2} - x\sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} + n^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &\overset{!}{=} 0\\
\sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^k + n^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &\overset{!}{=} 0\\
\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^k + n^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &\overset{!}{=} 0\\
\sum_{k=2}^{\infty}\{c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_k k(k-1) - c_k k + n^2 c_k\}x^k + 2c_2 + 6c_3 x - c_1 x + n^2 c_0 + n^2 c_1 x &\overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Da rechts die Nullreihe steht, müssen die Vorfaktoren aller x-Potenzen gleich Null sein. Für $k = 0$ lesen wir aus den hinteren Termen ab: $2c_2 + n^2 c_0 = 0$, d.h. $c_2 = -\frac{n^2}{2} c_0$. Für $k = 1$ ergibt sich $(6c_3 - c_1 + n^2 c_1)x = 0$, also $c_3 = \frac{1-n^2}{6} c_1$. Für $k \geq 2$ schließlich erhalten wir aus der Bedingung

$$\{c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_k k(k-1) - c_k k + n^2 c_k\} = 0$$

die Rekursionsformel (zunächst eigentlich nur für $k \geq 2$, aber betrachtet man die beiden obigen Beziehungen genauer, so gilt sie schon für $k \geq 0$!!!)

$$c_{k+2} = \frac{k^2 - n^2}{(k+1)(k+2)} c_k, \; k \geq 0, \; c_0 = u(0) = 1, \; c_1 = u'(0) = 0.$$

(a) Da $c_1 = 0$ ist, folgt aus der Rekursionsformel sofort $0 = c_3 = c_5 = ... = c_{2k+1}, \; k \in \mathbb{N}$.

(b) Ist n gerade, so haben wir $c_{n+2} = \frac{n^2-n^2}{(n+1)(n+2)} c_n = 0$, d.h. das $n+2$ Glied ist 0. Gemäß der Rekursionsformel bedeutet dies aber $c_{n+4} = 0, \; c_{n+6} = 0, ...$ Also ist für Gerades n die Potenzreihe einfach ein Polynom!

(c) Wenn n ungerade ist, so ist $c_{2m} \neq 0$ für $m \in \mathbb{N}$. Wir wenden das Quotientenkriterium an:

$$\left|\frac{c_{2m+2}}{c_{2m}}\right| = \left|\frac{\frac{(2m+2)^2-n^2}{(2m+3)(2m+4)}}{\frac{(2m)^2-n^2}{(2m+1)(2m+2)}}\right| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Also konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig für $|x| < 1$.

Problem 42: Find the solution of the initial value problem

$$y'' - 2xy' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

using the power series method and determine the radius of convergence.

Lösung 42: Wir setzen eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt 0 an:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Diesen Ansatz wenden wir auf die Differentialgleichung an und bringen alle Potenzen zum gleichen Exponenten n, damit wir sie zusammenfassen können:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} y'' - 2xy - 2y \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n \\
&= \underbrace{2 \cdot 1 \cdot c_2 - 2c_0}_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2+2n)c_n\right] x^n
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt nun auf

$$\begin{aligned}
c_2 &= c_0 \\
c_{n+2} &= \frac{2}{(n+2)} c_n
\end{aligned}$$

und mit den Anfangswerten sehen wir, dass es nur gerade Potenzen gibt, die Koeffizienten der ungeraden sind 0:

$$c_0 = 1,\ c_2 = 1,\ c_4 = \frac{2^1}{4},\ c_6 = \frac{2^2}{4 \cdot 6},\ c_8 = \frac{2^3}{4 \cdot 6 \cdot 8}$$

Somit hat c_{2n} den Zähler 2^{n-1}, sowie den Nenner $\frac{1}{2} \cdot 2^n n!$. Also ist unsere Vermutung für die geschlossene Form:

$$c_{2n} = \frac{2^{n-1}}{\frac{1}{2} 2^n n!} = \frac{1}{n!}$$

Dies beweisen wir mit vollständiger Induktion:
$k = 0, 1$: $c_0 = 1$ und $c_2 = 1$ stimmt.
$k \to k+1$: Sei $c_{2k} = \frac{1}{k!}$, wir beweisen nun, dass $c_{2(k+1)} = \frac{1}{(k+1)!}$. Laut Rekursion gilt $c_{2k+2} = \frac{2}{2k+2} c_{2k}$. Setzen wir nun die Induktionsannahme ein, unter Beachtung der korrekten Indices, so erhalten wir $c_{2(k+1)} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{1}{(k+1)!}$ und somit ist die Vermutung bewiesen. Insgesamt lautet die Lösung also

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k} \,.$$

Für den Konvergenzradius betrachten wir den Quotienten zweier aufeinander folgender Monome

$$\frac{|c_{2n+2}||x^{2n+2}|}{|c_{2n}||x^{2n}|} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}|x^{2n+2}|}{\frac{1}{n!}|x^{2n}|} = \frac{1}{n+1}|x^2| \,.$$

Der Konvergenzradius ist bestimmt durch $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}|x^2| < 1$. Hier geht aber $\frac{1}{n+1}$ gegen 0, also ist x beliebig und der Konvergenzradius unendlich: Diese Potenzreihe konvergiert auf der ganzen reellen Achse.

Problem 43: The solution of the differential equation

$$y''(x) - x\,y(x) = 0$$

can be expanded as a power series with center of expansion $x_0 = 1$. Give the recursion formula for the coefficients depending on $y(1)$ and $y'(1)$ and compute the first four coefficients.

Lösung 43: Mit $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ folgt

$$\begin{aligned}
0 &= y''(x) - xy(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x-1)^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)(x-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \\
&= 2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} - a_n\big](x-1)^n
\end{aligned}$$

Also gilt mit $a_0 = y(1)$ und $a_1 = y'(1)$ die Rekursionsgleichung

$$a_2 = \frac{1}{2}a_0$$
$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1} + a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 1$$

Für die ersten Koeffizienten erhalten wir

$$a_2 = \frac{1}{2}a_0, \quad a_3 = \frac{a_0 + a_1}{3 \cdot 2}, \quad a_4 = \frac{a_1 + \frac{1}{2}a_0}{4 \cdot 3} = \frac{a_1}{12} + \frac{a_0}{24}$$

Also ist

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0\left(1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1) + \dots\right) \\ &\quad + a_1\left((x-1) + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4 + \dots\right) \end{aligned}$$

Problem 44: Determine a solution of the initial value problem

$$(x^2 + 2x + 2)y''(x) + 2(x+1)y'(x) - 2y(x) = 0, \quad y(-1) = 1, \quad y'(-1) = 0$$

applying the power series method.

Lösung 44: Der Ansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x+1)^k$, $y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x+1)^{k-1}$ und $y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(x+1)^{k-2}$ liefert in der Differentialgleichung eingesetzt mit $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(x+1)^k + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(x+1)^{k-2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x+1)^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x+1)^k \stackrel{!}{=} 0$$

Koeffizientenverschiebung $k \curvearrowright k+2$ im zweiten Summanden:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(x+1)^k + \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}(x+1)^k + 2\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x+1)^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x+1)^k \stackrel{!}{=} 0$$

Gemeinsamer Laufbereich aller Summen ist $2, \dots, \infty$, also

$$2a_2 + 6a_3(x+1) + 2a_1(x+1) - 2a_0 - 2a_1(x+1) + \sum_{k=2}^{\infty}[(k+2)(k+1)a_{k+2} + (k(k-1) + 2k)a_k - 2a_k](x+1)^k = 0\,.$$

Gliedweiser Komponentenvergleich liefert $2a_2 - 2a_0 \stackrel{!}{=} 0$, also $a_2 = a_0$ sowie $a_3 = 0$ und die Rekursionsformel: $a_{k+2} = \frac{1-k}{1+k}a_k, \quad k \geq 2$. Daraus ersieht man sofort $a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = ... = 0$. Das Einarbeiten der Anfangsbedingungen liefert schliesslich $a_0 = y(-1) = 1$ und $a_1 = y'(-1) = 0$. Mit der Rekursionsformel erhält man $a_4 = -1/3a_2 = -1/3a_0$, $a_6 = -3/5a_4 = 1/5a_0$, $a_8 = -5/7a_6 = -1/7a_0$ usw. Induktiv zeigt man: $a_{2k+2} = (-1)^k\frac{1}{2k+1}$, also

$$y(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x+1)^{2k+2}}{2k+1}\,.$$

Problem 45: Use the generalized power series method, i.e., employ the ansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda}$ to determine the general solution of the homogeneous differential equation

$$x^2y''(x) + x^2y'(x) - 2y(x) = 0.$$

Lösung 45: Wir setzen an

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda}, \qquad a_0 \neq 0,$$

also

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\lambda)x^{k+\lambda-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda-2}.$$

Deshalb ist

$$x^2y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}(k+\lambda-1)x^{k+\lambda},$$

außerdem

$$x^2y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung gibt

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k+\lambda}\left[a_k(k+\lambda)(k+\lambda-1) + a_{k-1}(k+\lambda-1) - 2a_k\right] + a_0x^\lambda(\lambda(\lambda-1)-2)$$

Jetzt machen wir einen Koeffizientenvergleich: Beim Term für x^λ finden wir

$$0 \stackrel{!}{=} \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

Also können wir entweder $\lambda = 2$ oder $\lambda = -1$ wählen. Für $\lambda = -1$ beinhaltet der verallgemeinerte Potenzreihenansatz $y(x) = x^{-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_kx^k$ aber den (nicht mehr verallgemeinerten) Ansatz $y(x) = x^2\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_kx^k$ für $\lambda = 2$ (setze $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_{k-3} = b_k$). Also rechnen wir nur mit $\lambda = -1$ weiter. Koeffizientenvergleich liefert dann

$$0 \stackrel{!}{=} a_k(k-1)(k-2) + a_{k-1}(k-2) - 2a_k \;\Rightarrow a_kk(k-3) + a_{k-1}(k-2) \stackrel{!}{=} 0,\; k \geq 1.$$

Dies bedeutet für

$$\begin{aligned}
k = 1: &\; -2a_1 - a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}a_0,\\
k = 2: &\; -2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0,\\
k = 3: &\; a_2 = 0,\\
k > 3: &\; a_k = -\frac{k-2}{k(k-3)}a_{k-1}.
\end{aligned}$$

Der Koeffizient a_3 ist also noch frei wählbar. Durch vollständige Induktion kann man zeigen, dass $a_k = \frac{(-1)^{k+1}(k-2)}{k!}6a_3$, $k \geq 3$: Für $k = 3$ ist die Aussage richtig. Wenn wir annehmen, dass sie für $k-1 \geq 3$ richtig ist, dann ist sie auch für k richtig, denn

$$a_{k-1}\cdot\left(-\frac{k-2}{k(k-3)}\right) = \frac{(-1)^k(k-3)}{(k-1)!}6a_3\left(-\frac{k-2}{k(k-3)}\right) = \frac{(-1)^{k+1}(k-2)}{k!}6a_3$$

und das war genau die angegebene Form für a_k. Insgesamt folgt die folgende Form der allgemeinen Lösung,

$$y(x) = a_0x^{-1} - \frac{1}{2}a_0 + a_3\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(k-2)}{k!}6a_3x^{k-1}.$$

Die Tatsache, dass wir hier zwei Parameter zur freien Wahl haben, zeigt, dass der Lsungsraum der DGL zweidimensional ist (was ja auch so sein muß!). Die allgemeine Lösung der DGL ist also

$$y(x) = A\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) + B\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(k-2)}{k!}x^{k-1},\; A, B \in \mathbb{R}.$$