4 Aufgabe: Betrachten wir das folg. hom. DGL-System

$$u'(x) = A\,u(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\cancel{(3,-4)^T}$ ein EV von A ist und bestimmen Sie den zugeh. EW.

(b) Bestimmen Sie alle weiteren EWe und EVen von A.

(c) Gibt es eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus EVen von A?

(d) Geben Sie … die Fundamentallösung an.

Lösung: (a) $Av \overset{!}{=} \lambda v$: $\quad Av = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = -1 \cdot v$. Also: $\underline{\lambda = -1}$.

(b) Char. Polynom: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)$.

$\Rightarrow \lambda = -1,\ \lambda = 2$ sind EWe von A.

EVen erhält man durch das Lösen des Systems $(A - \overset{=2}{\lambda} I)w = 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1-2 & 0 & 0 \\ 4 & 2-2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \Rightarrow w_2 = t \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow w_1 = 0 \end{array} \quad \text{Also: } w \overset{t=1}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Probe: $Aw = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot w$ ✓.

(c)

Ja, denn die EVen v und w sind l.u.

(d) $u(x) \overset{\text{Satz 2.14}}{=} c_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$.

3^{rd} Exercise: 3. Aufg.

Matrix produkt

(b) $\frac{\partial}{\partial s} f(g(s)) = (f \circ g)'(s) = f'(g(s)) \cdot g'(s) = f'(s, e^{-s}) \cdot g'(s)$

$= \left(\nabla f(s, e^{-s})\right)^T \cdot g'(s) \overset{(a)}{=} (\ldots, \ldots) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-s} \end{pmatrix} =$

$= \cancel{-\ln(e^{-s} \cdot e^{s} + 1)} - \frac{e^{-s}}{e^{-s}} \left(\ln(e^{-s} \cdot e + 1) - \cancel{\ln(e^{-s} \cdot e^{s} + 1)} \right)$

$= -\ln(e^{1-s} + 1)$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h = f \circ g"'] & \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$