Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. F. Hettlich
Dr. S. Schmitt
Dipl.-Math. J. Kusch

Karlsruhe, den 30.06.2011

Lösungen zum 12. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik II für biw/ciw/mach/mage/vt

Aufgabe 56: Bestimmen Sie die Faltung $f * g$ für die Funktionen

$$f(t) = t^2 \qquad \text{und} \qquad g(t) = 1 - H(t-1), \qquad \text{wobei } H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \text{ die Heaviside-Funktion ist.}$$

Berechnen Sie außerdem $\mathcal{L}(f * g)$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit $\mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g$.

Lösung 56: Wir berechnen

$$\begin{aligned}(f*g)(t) &= \int_0^t (t-v)^2 \, dv - \int_0^t (t-v)^2 H(v-1) \, dv \\ &= \frac{1}{3}t^3 - H(t-1)\int_1^t (t-v)^2 \, dv = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}H(t-1)(t-1)^3.\end{aligned}$$

Achtung: das in der letzten Zeile stimmt wirklich: Das Integral $\int_0^t (t-v)^2 H(v-1)\, dv$ ist nicht gleich $(t-1)^3/3$, sondern gleich $H(t-1)(t-1)^3/3$. Für $t > 1$ sind beide Ausdrücke natürlich gleich, aber für $t < 1$ ist $H(t-1)(t-1)^3/3 = 0$ (so wie's sein soll), aber $(t-1)^3/3 \neq 0$.

Wir bemerken, dass $\frac{1}{3}H(t-1)(t-1)^3$ die Verschiebung um eins nach rechts von der Funktion $\frac{1}{3}t^3$ ist (Skizze!). Also ist die Laplace-Transformation der Faltung $(f * g)$ gleich

$$\mathcal{L}[(f*g)(t)] = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{s^4} - \frac{6e^{-s}}{s^4}\right) = \frac{2}{s^4}(1 - e^{-s}).$$

Weiter ist $F = \mathcal{L}f = \frac{2}{s^2}$ und $G = \mathcal{L}g = \mathcal{L}[1 - H(t-s)] = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$, also gilt $L(f*g) = F \cdot G$.

Aufgabe 57: Geben Sie die Urbildfunktionen der folgenden Bildfunktionen an:

a) $\dfrac{3}{(s+3)(s+1)}$, b) $\left(\dfrac{2e^{-s}}{s} - \dfrac{3e^{-2s}}{s}\right)\dfrac{s}{s^2+9}$,

sowohl über Partialbruchzerlegungen als auch mit Hilfe des Faltungssatzes.

Lösung 57: a) $K(s) = \frac{3}{2}(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}) \Rightarrow k(t) = \frac{3}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$.
$K(s) = 3F(s)\, G(s) \Rightarrow$ Urbild $3(f*g)(t)$ mit $f(t) = e^{-3t},\ g(t) = e^{-t}$
$k(t) = 3(f*g)(t) = 3\int_0^t e^{-3v}e^{-t+v}dv = 3e^{-t}\int_0^t e^{-2v}dv = 3e^{-t}\left[-\frac{e^{-2v}}{2}\right]_0^t = \frac{3}{2}e^{-t}(e^{-2t}+1) = \frac{3}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$.
b) $K(s) = \frac{2e^{-s}}{s^2+9} - \frac{3e^{-2s}}{s^2+9} \Rightarrow k(t) = \frac{2}{3}h(t-1)\sin 3(t-1) - -h(t-2)\sin 3(t-2)$
$K(s) = F(s)G(s)$ mit $F(s) = \frac{2e^{-1}-3e^{-2s}}{s},\ G(s) = \frac{s}{s^2+9} \Rightarrow f(t) = 2h(t-1) - 3h(t-2),\ g(t) = \cos 3t$
$\Rightarrow k(t) = (f*g)(t) = 2\int_0^t h(v-1)\cos 3(t-v)\, dv - 3\int_0^t h(v-2)\cos 3(t-v)\, dv$
$= 2h(t-1)\int_0^t \cos 3(t-v)\, dv - 3h(t-2)\int_2^t \cos 3(t-v)\, dv$
$= 2h(t-1)\left[-\frac{\sin 3(t-v)}{3}\right]_1^t - 3h(t-2)\left[\frac{\sin 3(t-v)}{3}\right]_2^t = \frac{2}{3}h(t-1)\sin 3(t-1) - \frac{3}{3}h(t-2)\sin 3(t-2)$.

Aufgabe 58: Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cos(x_2) \cos(x_3)\,, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Berechnem Sie den Gradienten $\nabla f(x)$ und die Hessematrix $H_f(x) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\right)_{i,j=1,2,3}$

Lösung 58: $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x),\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)\right)^\top = (\cos x_2 \cos x_3,\ -x_1 \sin x_2 \cos x_3,\ -x_1 \cos x_2 \sin x_3)^\top.$

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}\right)_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin x_2 \cos x_3 & -\cos x_2 \sin x_3 \\ -\sin x_2 \cos x_3 & -x_1 \cos x_2 \cos x_3 & x_1 \sin x_2 \sin x_3 \\ -\cos x_2 \sin x_3 & x_1 \sin x_2 \sin x_3 & -x_1 \cos x_2 \cos x_3 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: H_f ist eine symmetrische Matrix, da nach dem Satz von Schwarz $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ gilt.

Aufgabe 59: Sei die Funktion $f(x) = x_1^2 x_2$, $x \in \mathbb{R}^2$, und ein Vektor $d = (\cos\varphi, \sin\varphi)^\top$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ gegeben.

(a) Berechnen Sie den Gradienten ∇f und das Skalarprodukt $d \cdot \nabla f$ an der Stelle x.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial d}(x)$ nach der Definition 4.14.

Lösung 59:

(a) Da f in ihren ganzen Definitionsbereich partiell differentierbar ist und ihr Gradient stetig ist, lässt sich die Richtungsableitung von f nach dem Satz 4.15 folgendermaßen leicht ausrechnen:

$$\nabla f(x) = (2x_1 x_2, x_1^2)^\top, \qquad d \cdot \nabla f(x) = 2\,x_1 x_2\, \cos\varphi + x_1^2\, \sin\varphi.$$

(b) Nach Definition 4.14 ist der folgende Grenzwert zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial d} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left((x_1 + h\, \cos\varphi)^2 (x_2 + h\, \sin\varphi) - x_1^2 x_2\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left((x_1 + h\, \cos\varphi)^2\, [x_2 + h\, \sin\varphi - x_2] + (x_1 + h\, \cos\varphi)^2 x_2 - x_1^2 x_2\right) \\ &= \lim_{h\to 0} (x_1 + h\, \cos\varphi)^2 \sin\varphi + \lim_{h\to 0} x_2 (2\,x_1\, \cos\varphi + h\cos^2\varphi) \\ &= 2\,x_1 x_2\, \cos\varphi + x_1^2\, \sin\varphi. \end{aligned}$$

Der Limes existiert für alle $x \in \mathbb{R}^2$ und für alle d, d.h. f ist in ganz $\mathbb{R}^2$ in alle Richtungen differenzierbar! Die Ergebnisse aus (a) und (b) stimmen überein.

Aufgabe 60: Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(s) := \int_{1/s}^{s^2} \frac{\sin(st)}{t}\, dt\,,$$

indem Sie partielle Ableitungen von $g(x, y, z) = \int_x^y \frac{\sin(zt)}{t}\, dt$ und die Kettenregel verwenden.

Lösung 60: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt für die partiellen Ableitungen nach x bzw. y:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{\sin(xz)}{x}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\sin(yz)}{y}.$$

Für die partielle Ableitung nach z kann man Differentiation und Integration vertauschen, da der Integrant stetig, beschränkt und beschränkt differenzierbar ist (Bedingungen Satz 4.3), und erhält

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = \int_x^y \cos(zt)\, dt \ = \ \left[\frac{\sin(zt)}{z}\right]_x^y = \frac{\sin(yz) - \sin(xz)}{z}.$$

Damit ist der Gradient

$$F'(x, y, z) = \left(-\frac{\sin(xz)}{x}\ ,\ \frac{\sin(yz)}{y}\ ,\ \frac{\sin(yz) - \sin(xz)}{z}\right)^\top.$$

Mit diesem Resultat bekommen wir die gesuchte Ableitung, indem wir g mit der Funktion $\psi(s) = (1/s, s^2, s)$ kombinieren. Die Kettenregel liefert uns für

$$f(s) = g(\psi(s)) = g(1/s, s^2, s),$$

die Ableitung

$$
\begin{aligned}
f'(s) = g'(1/s, s^2, s)\,(-1/s^2, 2s, 1)^\top &= \nabla g(1/s, s^2, s) \cdot (-1/s^2, 2s, 1)^\top \\
&= \frac{\sin(1)}{s} + \frac{2\sin(s^3)}{s} + \frac{\sin(s^3) - \sin(1)}{s} \;=\; \frac{3\sin(s^3)}{s}.
\end{aligned}
$$